数理統計学・期末試験問題 (2012.07.19)

- **[1]–[7] は必答. [8]–[9] から 1 題だけを選択解答せよ.** (100 点満点)
- 電卓などの計算機の使用禁止.
- 提出する解答用紙には学籍番号と氏名を記入せよ.
- 判読不能な文字 (薄い, 小さい, 汚いなど) や論理不明瞭な文章は読みません.
- 試験終了後, 問題の解説を担当者のホームページに掲載するので参考にされたい.

[1] (必答) 10 本中あたりが 2 本含まれているくじがある (1 回引いたくじは元に戻さない). このくじを 3 人が順に引くとき, 1 番目, 2 番目, 3 番目に引く人の当たる確率は同じであることを示せ. (10 点)

[2] (必答) サイコロを 2 個投げて出た目の小さい方を X とする. (同じ目が出たときは, その目を X とする.) X の分布とその平均値を計算せよ. (10 点)

[3] (必答) 2 つの事象 E, F に対して, $P(E) = P(F) = \dfrac{1}{2}$, $P(E \cup F) = \dfrac{2}{3}$ とする. 次の問いに答えよ. ただし, E^c は E の余事象を表す. (10 点)

(1) $P(E^c \cap F)$ を求めよ.

(2) 条件付き確率 $P(E|F^c)$ を求めよ.

[4] (必答) 標準正規分布表を用いて次の問いに答えよ. (10 点)

(1) サイコロを 720 回投げるとき, 1 の目が 135 回以上出る確率を求めよ.

(2) 大規模な選抜試験が実施され, 上位 10%が合格となる. 試験の結果, 平均点は 65 点, 標準偏差は 8 点であった. 受験者全体の得点分布は正規分布であると仮定して, 合格するための最低点を求めよ.

[5] (必答) 「100 万世帯に対して番組 A の視聴率調査を行った. 600 世帯を無作為抽出して視聴率 22.1% が得られたので, 標準的な計算によって, 信頼係数 95% の信頼区間 $22.1 \pm 3.3\%$ が導かれた」このことに対して以下の記述はいずれも誤りである. 理由を述べて正しい記述に書き直せ. (20 点)

(1) 信頼区間では, 端のほうの値よりも中央の値のほうが信頼度が高い.

(2) 信頼係数を 99% に高めるほうが, 信頼区間の幅が狭くなり, より精度の高い推定ができる.

(3) 信頼係数 95% の信頼区間の幅を 1/10 として $22.1\% \pm 0.33\%$ のように精度を高めるためには標本数を 10 倍にしなければならない.

(4) 母集団が 10 倍の 1000 万世帯になると, 信頼係数 95% の信頼区間の幅は $\sqrt{10}$ 倍に広がり精度が落ちる.

[6] (必答) ある国では, 病気 A の感染者は 100 人に 4 人の割合であるという. 検査 B は, 感染者の 90%に陽性反応を示すが, 非感染者の 5% にも陽性反応が出てしまう. ある人がこの検査を受けて陽性反応が出た. この人が感染者である確率 (%で表わし, 小数第 1 位を四捨五入せよ) を求めよ. (10 点)

[7] **(必答)** コインを 400 回投げたところ表が 222 回出た．このコインは公正であるといえるだろうか？ 有意水準 5% で仮説検定せよ．有意水準 1% ではどうか？ これら 2 つの結論を比較検討せよ．(10 点)

[8] **(選択)** 中心を O とする半径 R の円の内部にランダムに 1 点を選び, その点を通る中心を O とする円の面積を X とする．X の分布関数 $F(x) = P(X \leq x)$ を求めよ．次に, それを用いて, 確率密度関数, 平均, 分散を求めよ．(20 点)

[9] **(選択)** コインを 400 回投げたとき, 表が 215 回出た．有意水準 5% の仮説検定によってコインは公正といえるかどうかを判定するときに生ずる第 2 種誤り確率とは何か説明せよ．次に, 第 2 種誤り確率が 5%以下になるような状況はどのような場合であるか答えよ．(20 点)

付録：標準正規分布表 $P = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^z e^{-x^2/2}dx$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4773	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4983	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

数理統計学 (2012.07.19 実施) 期末試験解説

[1] 1 番目の人が当たる事象を A, 2 番目の人が当たる事象を B, 3 番目の人が当たる事象を C とする. 題意から

$$P(A) = \frac{2}{10} \qquad P(A^c) = \frac{8}{10}.$$

は明らか. 1 番目が引き終わった状況から,

$$P(B|A) = \frac{1}{9}, \qquad P(B|A^c) = \frac{2}{9}$$

であるから,

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{10} + \frac{2}{9} \cdot \frac{8}{10} = \frac{18}{90} = \frac{2}{10} = P(A).$$

同様に, 2 番目が引き終わった状況から,

$$P(C|A \cap B) = 0, \qquad P(C|A \cap B^c) = P(C|A^c \cap B) = \frac{1}{8}, \qquad P(C|A^c \cap B^c) = \frac{2}{8}$$

したがって,

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C|A \cap B)P(A \cap B) + P(C|A \cap B^c)P(A \cap B^c) \\ &\qquad + P(C|A^c \cap B)P(A^c \cap B) + P(C|A^c \cap B^c)P(A^c \cap B^c) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} + \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{8} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \\ &= \frac{144}{720} = \frac{2}{10} = P(A) \end{aligned}$$

上記の条件付き確率による説明は, 樹系図によるものと同じである.

[2] サイコロの 1 個目の目を i, 2 個目の目を j とすると, 標本空間と確率は,

$$\Omega = \{\omega = (i, j) \,;\, i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}, \qquad P(\{\omega\}) = P(\{(i, j)\}) = \frac{1}{36}$$

で与えられる. $X = \min\{i, j\}$ の値について表を作ると, 次のようになる.

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5
6	1	2	3	4	5	6

この表から確率分布がわかる.

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

平均は公式にあてはめて計算する.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_{k=1}^{6} kP(X=k) \\
&= 1\times\frac{11}{36} + 2\times\frac{9}{36} + 3\times\frac{7}{36} + 4\times\frac{5}{36} + 5\times\frac{3}{36} + 6\times\frac{1}{36} = \frac{91}{36}\,.
\end{aligned}
$$

[3]　(1) $P(E^c \cap F) = P(F) - P(E\cap F) = \dfrac{1}{6}$.

(2) $P(E|F^c) = \dfrac{P(E\cap F^c)}{P(F^c)} = \dfrac{1/6}{1/2} = \dfrac{1}{3}$

[4]　(1) サイコロを 720 回投げるとき 1 の目が出る回数は $B(720, 1/6) \approx N(120, 10^2)$ に従う. したがって, 半目補正して,

$$
P(X \geq 135) = P(X \geq 134.5) = P\left(\frac{X-120}{10} \geq \frac{134.5-120}{10}\right) = P\left(\frac{X-120}{10} \geq 1.45\right)
$$

標準正規分布表を用いて, 上の値は, $0.5 - 0.4265 = 0.0735$.

(2) $X \sim N(65, 8^2)$ に対して, $P(X \geq a) = 0.1$ となるような a を求めればよい. 標準正規分布表により, $Z \sim N(0,1)$ なら, $P(Z \geq 1.28) = 0.1$. したがって,

$$
Z = \frac{X-65}{8} \geq 1.28 \quad \Leftrightarrow \quad X \geq 75.2
$$

したがって, 76 点以上とれればよい.

[5]　(1) 確率 95%で得られた信頼区間が母平均を含むことを言っているにすぎず, 信頼区間の中央のあたりが母平均に近いという議論は誤り.

(2) 信頼係数を 99% に高めるということは, 確率 99%で母平均を信頼区間に含むことになるので, 信頼区間の幅は広がることになり, 言い方としてはより曖昧になる.

(3) 信頼限界は, $\bar{X} \pm z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ で与えられるので, 信頼区間の幅を 1/10 にするためには標本数は 100 倍必要になる.

(4) 信頼区間の議論には母集団の大きさは関係ない.

[6]　病気 A に感染している確率と感染していない確率は

$$
P(A) = \frac{4}{100}\,, \qquad P(A^c) = \frac{96}{100}\,.
$$

検査 B に陽性反応を示す確率は, 条件付確率であって,

$$
P(B|A) = 0.9 \qquad P(B|A^c) = 0.05
$$

ベイズの公式によって,

$$
\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)} \\
&= \frac{\frac{4}{100}\times 0.9}{\frac{4}{100}\times 0.9 + \frac{96}{100}\times 0.05} = \frac{3.6}{3.6+4.8} = 0.428
\end{aligned}
$$

したがって, 43%.

[7] $H_0 : p = \dfrac{1}{2}$, $H_1 : p \neq \dfrac{1}{2}$, $\alpha = 0.05$ によって検定を行う. コインを 400 回投げるときの表の回数を X とすると, $X \sim B(400, 1/2) \approx N(200, 10^2)$. H_1 から両側検定の棄却域は

$$W : \left| \frac{x - 200}{10} \right| \geq 1.96$$

実現値 $\bar{x} = 222$ は W に落ちる. したがって, 有意水準 5% で H_0 は棄却され, コインは公正ではないと判定される.

有意水準 $\alpha = 0.01$ とすると, 両側検定の棄却域は

$$W : \left| \frac{x - 200}{10} \right| \geq 2.58$$

であるから, 実現値 $\bar{x} = 222$ は W に落ちない. したがって, 有意水準 1% で H_0 は棄却されず, 高度に有意とは判定できない.

[8] 中心を O とする半径 R の円の内部にランダムに 1 点を選び, その点を通る中心を O とする円の面積を X とする. X の分布関数 $F(x) = P(X \leq x)$ を求めよ. 次に, それを用いて, 確率密度関数, 平均, 分散を求めよ.

題意から $0 \leq X \leq \pi R^2$ の範囲の値をとるから, $x < 0$ では $F(x) = 0$, $x \geq \pi R^2$ では $F(x) = 1$ である. そこで, $0 \leq x \leq \pi R^2$ とする. $X \leq x$ はランダム円の半径が $\sqrt{x/\pi}$ 以下となることを意味するが, それはランダム点が O を中心とする半径 $\sqrt{x/\pi}$ の円板から選ばれたことと同値である. したがって,

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{\pi(\sqrt{x/\pi})^2}{\pi R^2} = \frac{x}{\pi R^2}\,.$$

これを微分して, 確率密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi R^2}\,, & 0 \leq x \leq \pi R^2, \\ 0, & \text{そのほか} \end{cases}$$

となる. その平均値は

$$m = \int_0^{\pi R^2} x f(x) dx = \frac{\pi R^2}{2}$$

分散は,

$$\sigma^2 = \int_0^{\pi R^2} x^2 f(x) dx - m^2 = \frac{(\pi R^2)^2}{3} - \left(\frac{\pi R^2}{2} \right)^2 = \frac{(\pi R^2)^2}{12}$$

[9] $H_0 : p = \dfrac{1}{2}$, $H_1 : p \neq \dfrac{1}{2}$, $\alpha = 0.05$ によって検定を行う. コインを 400 回投げるときの表の回数を X とすると, $X \sim B(400, 1/2) \approx N(200, 10^2)$. H_1 から両側検定の棄却域は

$$W : \left| \frac{x - 200}{10} \right| \geq 1.96$$

実現値 $\bar{x} = 215$ は W に落ちない. したがって, 有意水準 5% で H_0 は棄却されず, コインは公正であると判定される. この判定が間違っている確率, すなわち, コインは公正ではないのにもかかわらず

公正であると判定してまう確率が第 2 種誤り確率である．コインが公正ではない場合, 可能な p は無限にあり, 第 2 種誤り確率を評価することができない．

たとえば, $p = 0.525$ と $p = 0.6$ の場合を図に示すと, $p = 0.525$ の場合は, $\beta \geq 0.5$ でかなり大きい．公正なコインに近いものは公正であるという判定をしがちであるが, その間違い確率は極めて大きい．$p = 0.6$ の場合は, $\beta \leq 0.025$ でかなり小さい．公正なコインからかなりずれているものに対しては, 十分精度よく正しい判定になっているといえる．