# 第4章　写　像

現代数学の基礎は集合にあるが, 集合だけをばらばらに考えても発展性はない. 集合間の関係を議論することで内容が豊富になる. そのための基本概念が写像である.

## 4.1　写像の定義

集合 $X$ の各元 $x$ に集合 $Y$ の 1 つの元 $y$ を対応させる規則を $X$ から $Y$ への**写像**といい,

$$f : X \longrightarrow Y \qquad \text{または} \qquad X \xrightarrow{f} Y \tag{4.1}$$

のように表す. このとき, $X$ を $f$ の**定義域**または**始集合**, $Y$ を**終集合**という. 始集合と終集合が一致するとき, 写像 $f : X \longrightarrow X$ を集合 $X$ 上の**変換**ともいう.

写像 $f : X \longrightarrow Y$ によって $a \in X$ が $b \in Y$ に対応するとき, $b$ を $f$ による $a$ の**像**といい,

$$b = f(a) \qquad \text{または} \qquad f : a \mapsto b$$

のように書く.

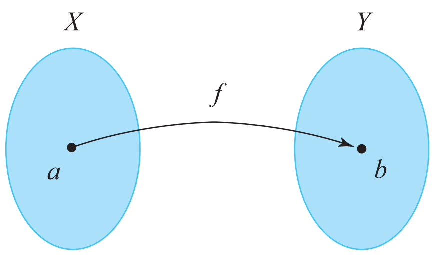


図 4.1: 写像 $f : X \longrightarrow Y$

たとえば, $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b\}$ とするとき, 1 に $a$ を, 2 に $b$ を, 3 に $a$ を対応させれば, この対応は写像となる. 記述するときは,

$$f(1) = a, \qquad f(2) = b, \qquad f(3) = a,$$

あるいは,

$$1 \mapsto a, \qquad 2 \mapsto b, \qquad 3 \mapsto a$$

のように書けばよい.

特に, $X, Y$ が実数の集合のときは, 写像というよりは**関数**または**実関数**ということが多い.[1] 実際, 関数 $f(x)$ というと $x$ の式 (数式) を思い浮かべるだろう. たとえば,

$$5x^2 - 2x + 1, \qquad \sin 2x + \cos 5x, \qquad xe^{-x} + e^{-2x} \tag{4.2}$$

などは関数と理解される. つまり, (4.2) のような $x$ の式が与えられれば, 各実数をその式に代入計算することで新しい実数が 1 つ得られる. この機能はまさに写像であり, $x$ の式と関数 $f(x)$ は区別せずに用いることが多い. 一つ注意点は, 写像としての関数には定義域が定まっている必要がある. 単なる式 (4.2) には定義域に関する言及がないが, 慣例によって, 定義域はできるだけ広くとる. この場合は 実数全体 $\mathbb{R}$ を定義域とする. そうすると, (4.2) の 3 式は, それぞれ, $\mathbb{R}$ からそれ自身への写像と理解される. 一方,

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}, \qquad g(x) = \sqrt{x^2 - 4},$$

なども実関数とみなされるが, 実数値をとるためには $x$ に任意の実数を代入することができず, 定義域が $\mathbb{R}$ より狭く限定される. それでも, 定義域はできるだけ広くとることが暗黙の了解である. したがって, $f(x)$ の定義域は $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 1\}$, $g(x)$ の定義域は $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$ となる. もちろん, できるだけ広くとるばかりでなく, 問題に応じて適切な定義域を与えることが重要である.

■ **写像の相等** 2 つの写像 $f : X \longrightarrow Y$, $g : X \longrightarrow Y$ が, すべての $x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ を満たすとき, (写像として) 等しいといい, $f = g$ と書く. 定義域と終集合もこみにしていることに注意しよう.

---

[1] 一般に, 写像 $f : X \longrightarrow Y$ において, 終集合 $Y$ が数の集合のときは, $f$ を $X$ 上の**関数**という.

■ **写像のグラフ** $X, Y$ を 2 つの集合とする. $x \in X$ と $y \in Y$ の順序も考慮に入れた組 $(x, y)$ を**順序対**という. そのような順序対の全体からなる集合を $X \times Y$ と書き, $X$ と $Y$ の**直積 (集合)** という:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対して, $X \times Y$ の部分集合

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

を $f$ の**グラフ**という.

実関数 $y = f(x)$ に対して, $xy$-座標平面に描かれる図形としてのグラフにはなじみがあるだろう. 実関数 $f$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像であるから, 上に述べた写像のグラフという意味で, そのグラフ $G(f)$ は $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ の部分集合として定義される. 一方, 順序対の集合 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の元 $(x, y)$ は, $xy$-座標平面の点に対応する. したがって, $G(f)$ の元 $(x, f(x))$ は, $x$ を動かすとともに座標平面内に図形を描くことになる. この図形が, いわゆる関数 $y = f(x)$ のグラフである.

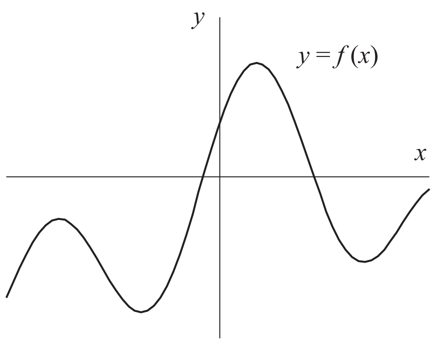


図 4.2: 関数 $y = f(x)$ のグラフ

**定 理 4.1** $X, Y$ を集合とする. 直積集合 $X \times Y$ の部分集合 $G$ について, 次の 2 条件は同値である.

(i) $G$ は, ある写像 $f : X \longrightarrow Y$ のグラフ $G(f)$ に一致する.

(ii) すべての $x \in X$ に対して, $(x, y) \in G$ となる $y \in Y$ がただ 1 つ存在する.

**証 明** (i) $\Rightarrow$ (ii). $G = G(f)$ として, (ii) が成り立つことを示す. まず, $x \in X$ に対して, $y = f(x)$ とおくと, $y \in Y$ であって, グラフの定義から $(x, y) = (x, f(x)) \in G(f) = G$. そのような $y$ の一意性は, $(x, y_1), (x, y_2) \in G$ とすれば, グラフの定義から $y_1 = f(x)$, $y_2 = f(x)$ が成り立ち, $y_1 = y_2$ となることからわかる.

(ii) $\Rightarrow$ (i). $x \in X$ に対して一意に定まる $y$ をもって写像 $y = f(x)$ を定義することができる. この写像 $f$ のグラフが $G$ である. ∎

**■ 公理論的集合論と写像** 公理論的集合論の立場では, 考える対象はすべて集合であるから, 写像もまた集合として導入される. つまり, 直積集合 $X \times Y$ の部分集合 $G \subset X \times Y$ で定理 4.1(ii) に述べた性質をもつものを写像の定義とする. 必要に応じて, 対応としての写像 $f : X \longrightarrow Y$ を導入すればよい.

この定義に従って, $X = \emptyset$ の場合を考えよう. $Y$ を任意の集合 (空集合でもよい) とするとき, $\emptyset \times Y = \emptyset$ であり, その部分集合は $\emptyset$ だけである. そこで, $X = \emptyset$, $G = \emptyset$ として, 定理 4.1(ii) が成り立つかどうかであるが, 前件 $x \in X$ が偽であるから, 後件のいかんにかかわらず (ii) は真である. つまり, (ii) は成立している. よって, (i) により $G = \emptyset$ はある写像のグラフである. ほかにグラフはないので, 写像 $f : \emptyset \longrightarrow Y$ がただ 1 つ存在することがわかった. なお, $X \neq \emptyset$ ならば, 写像 $f : X \longrightarrow \emptyset$ は存在しない.

**■ 一項演算と二項演算** 写像 $f : X \longrightarrow X$ は, 各 $x \in X$ に対して何らかの演算を施して $f(x) \in X$ を与えるという機能を持つので, この観点から一項演算とも呼ばれる. たとえば, 実数の符号反転 $x \mapsto -x$, 複素共役 $z \mapsto \bar{z}$, 命題の否定 $P \mapsto \neg P$, 補集合 $A \mapsto A^c$ などは一項演算である.

同様に, 写像 $f : X \times X \longrightarrow X$ は, 順序対 $(x, y) \in X \times X$ に対して何らかの演算を施して $f(x, y) \in X$ を与えるという機能を強調して, 二項演算と呼ばれることがある. たとえば, 実数の和 $(x, y) \mapsto x + y$, 行列の積 $(A, B) \mapsto AB$, 命題の論理和 $(P, Q) \mapsto P \vee Q$, 集合の積 $(A, B) \mapsto A \cap B$ などは二項演算である.

一項演算と二項演算が混ざっている表式では, 一項演算を優先する. たとえば, $A \cap B^c$ では, まず一項演算 $B^c$ を先に行い, そのあとで $A$ と積をとるので, ことさら $A \cap (B^c)$ と書く必要はない. 一方, 積を先に行う場合は $(A \cap B)^c$ と書く必要がある.

一般に, 集合 $X$ にいくつかの演算が与えられたものを**代数系**という. 基本的な代数系として, 半群, 群, 環, 体, 束などがある.

## 4.2 写像の演算と諸性質

■ **値域と逆像** 写像 $f : X \longrightarrow Y$ を考えよう. 部分集合 $A \subset X$ に対して,

$$f(A) = \{f(a) \,|\, a \in A\} \tag{4.3}$$

を $f$ による $A$ の**像**という. 特に, $f(X)$ を $f$ の**値域**という. 一般に, $f(X) \subset Y$ が成り立つ. また, 部分集合 $B \subset Y$ に対して,

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \,|\, f(x) \in B\} \tag{4.4}$$

を $f$ による $B$ の**逆像**という. 一般に, $f^{-1}(Y) = X$ が成り立つ.

**例 4.2** $X = Y = \mathbb{Z}$ として, $f(x) = 2x$ で定義される写像 $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ を考える. 像については,

$$f(\{1,2\}) = \{2,4\}, \quad f(\{-1,0,1\}) = \{-2,0,2\}, \quad f(\mathbb{Z}) = \{2x \,|\, x \in \mathbb{Z}\}$$

などが成り立つ. 特に, 値域 $f(\mathbb{Z})$ は偶数の集合に一致する. 逆像については,

$$f^{-1}(\{2,3,4\}) = \{1,2\}, \quad f^{-1}(\{-1,-3\}) = \emptyset, \quad f^{-1}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

などが成り立つ.

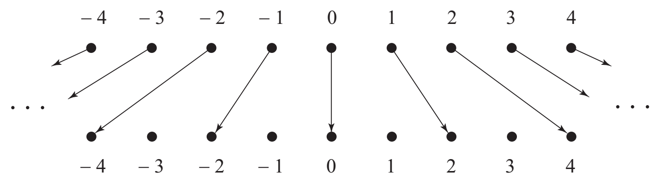


図 4.3: $f(x) = 2x$ によって定義される写像 $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

**定 理 4.3** $f : X \longrightarrow Y$ を写像とする.

(1) $A_1, A_2 \subset X$ に対して, $A_1 \subset A_2$ ならば $f(A_1) \subset f(A_2)$.

(2) $B_1, B_2 \subset Y$ に対して, $B_1 \subset B_2$ ならば $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

**証 明** (1) $y \in f(A_1)$ とすると, 像の定義 (4.3) によって, ある $x \in A_1$ によって $y = f(x)$ となる. $A_1 \subset A_2$ であるから, $x \in A_2$ であり $f(x) \in f(A_2)$ が成り立つ. したがって, $y \in f(A_2)$ となり, $f(A_1) \subset f(A_2)$ が示された.

(2) $x \in f^{-1}(B_1)$ とすると, 逆像の定義 (4.4) によって $f(x) \in B_1$ である. $B_1 \subset B_2$ から $f(x) \in B_2$ となり, したがって, $x \in f^{-1}(B_2)$ である. こうして, $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ が示された. ∎

**定 理 4.4** $f : X \longrightarrow Y$ を写像とする.

(1) $A_1, A_2 \subset X$ に対して,

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2), \tag{4.5}$$

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2). \tag{4.6}$$

(2) $B_1, B_2 \subset Y$ に対して,

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2), \tag{4.7}$$

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \tag{4.8}$$

**証 明** (1) (4.5) から始めよう. 示すべきことは, $y \in Y$ に対して,

$$y \in f(A_1 \cup A_2) \quad \Leftrightarrow \quad y \in f(A_1) \cup f(A_2) \tag{4.9}$$

である. (4.9) の左辺は定義によって,

$$y \in f(A_1 \cup A_2) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x[(x \in A_1 \cup A_2) \wedge (y = f(x))]$$

となる. これに論理演算の法則を適用して変形すると,

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \exists x[((x \in A_1) \vee (x \in A_2)) \wedge (y = f(x))] \\ &\Leftrightarrow \quad \exists x[((x \in A_1) \wedge (y = f(x)) \vee ((x \in A_2) \wedge (y = f(x))] \end{aligned}$$

が得られる. さらに, 存在命題の意味を考えれば,

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \exists x[(x \in A_1) \wedge (y = f(x))] \vee \exists x[(x \in A_2) \wedge (y = f(x))] \\ &\Leftrightarrow \quad (y \in f(A_1)) \vee (y \in f(A_2)) \\ &\Leftrightarrow \quad y \in f(A_1) \cup f(A_2) \end{aligned}$$

となる．こうして, (4.9) が示された．

(4.6) を示す． $y \in f(A_1 \cap A_2)$ とすると，ある $x \in A_1 \cap A_2$ が存在して $y = f(x)$ が成り立つ．一方, $x \in A_1$ かつ $x \in A_2$ であるから, $f(x) \in f(A_1)$ かつ $f(x) \in f(A_2)$ である．つまり, $y = f(x) \in f(A_1) \cap f(A_2)$ となり, $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ が示された．

(2) (4.7) を 2 通りの包含関係から示そう．まず, $f^{-1}(B_1 \cup B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ を示す． $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ とする．逆像の定義から, $f(x) \in B_1 \cup B_2$ である．これは $f(x) \in B_1$ または $f(x) \in B_2$ を意味し, $x \in f^{-1}(B_1)$ または $x \in f^{-1}(B_2)$ が成り立つ．したがって, $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ である．

次に, $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ を示す． $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ とする．これは, $x \in f^{-1}(B_1)$ または $x \in f^{-1}(B_2)$ を意味し, $f(x) \in B_1$ または $f(x) \in B_2$ が成り立つ．したがって, $f(x) \in B_1 \cup B_2$ であり, $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ である．

(4.8) については論理演算で示そう．

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\Leftrightarrow \quad (f(x) \in B_1) \wedge (f(x) \in B_2) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in f^{-1}(B_1)) \wedge (x \in f^{-1}(B_2)) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

したがって, $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ が成り立つ． ∎

**問 4.1** 定理 4.4 (4.5) を 2 通りの包含関係を示すことで証明せよ．

**問 4.2** 定理 4.4 (4.6) では, 一般には等号は成り立たない．例を示せ．

**定 理 4.5** $f : X \longrightarrow Y$ を写像とする．
(1) $A \subset X$ に対して, $A \subset f^{-1}(f(A))$ が成り立つ．
(2) $B \subset Y$ に対して, $f(f^{-1}(B)) \subset B$ が成り立つ．

**証 明** (1) $x \in A$ とする．像の定義によって, $f(x) \in f(A)$ である．逆像の定義 (4.4) で $B = f(A)$ として, $x \in f^{-1}(f(A))$ がわかる．したがって, $A \subset f^{-1}(f(A))$ が成り立つ．

(2) $y \in f(f^{-1}(B))$ とすると, ある $x \in f^{-1}(B)$ によって $y = f(x)$. 逆像の定義によって, $x \in f^{-1}(B)$ は $f(x) \in B$ と同値である．したがって, $y = f(x) \in B$. こうして $f(f^{-1}(B)) \subset B$ が示された． ∎

**問 4.3 (定理 4.5 (2) の精密化)** $f : X \longrightarrow Y$ を写像とする. $B \subset Y$ に対して $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$ が成り立つことを示せ.

■ **全射・単射・全単射** 写像 $f : X \longrightarrow Y$ は, 任意の $y \in Y$ に対してある $x \in X$ が存在して $f(x) = y$ となるとき, **全射**あるいは**上への写像**と呼ばれる. 言い換えれば, $f(X) = Y$ となるとき, 写像 $f : X \longrightarrow Y$ は全射である. $X$ の元 $x_1, x_2$ について, $x_1 \neq x_2$ なる限りいつでも $f(x_1) \neq f(x_2)$ となるとき, $f$ を**単射**という. 対偶で言い換えれば, $f(x_1) = f(x_2)$ となるのは $x_1 = x_2$ の場合に限るような写像が単射である. 全射かつ単射であるような写像を**全単射**という.

一般に, 写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対して, 写像 $f_1 : X \longrightarrow f(X)$ を $f_1(x) = f(x)$ で定義すると, $f_1$ は全射になる. このとき, $f(X) \neq Y$ であれば, 2 つの写像 $f, f_1$ は異なるものとして扱う (写像の相等の定義).

**例 4.6** $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像として次が成り立つ.

(1) $f(x) = e^x$ は単射であるが全射ではない.
(2) $f(x) = x^3 - x$ は全射であるが単射でない.
(3) $f(x) = 2x + 1$ は全単射である.
(4) $f(x) = x^2$ は単射でも全射でもない.

**問 4.4** 任意の集合 $Y$ に対して, 空集合 $\emptyset$ から $Y$ への写像 $f : \emptyset \longrightarrow Y$ がただ 1 つ存在することは既知である. この写像 $f$ は単射であることを示せ. さらに, $Y = \emptyset$ であれば, それは全単射であることを示せ.

■ **包含写像と恒等写像** 2 つの集合 $X, Y$ が $X \subset Y$ を満たすとき, 写像 $i : X \longrightarrow Y$ が $i(x) = x$ で定義される. これを**包含写像**という. 包含写像は単射である. もし, $X = Y$ であれば, 包含写像は全単射である. 特に, これを $X$ から $X$ への**恒等写像**といい, $i_X$ で表す.[2)] 言い換えると,

$$i_X(x) = x, \qquad x \in X,$$

で定義される写像 $i_X : X \longrightarrow X$ が恒等写像である.

[2)] 文献によって, $1_X$, $I_X$, $\mathrm{id}_X$ のような記号も用いられる.

## 4.3 合成写像

2 つの写像 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ に対して,

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \qquad x \in X \tag{4.10}$$

で定義される $X$ から $Z$ への写像 $g \circ f$ を $f$ と $g$ の**合成写像**という. (4.10) の左辺において, $g \circ f$ は 1 つの記号とみなされるので, そのことを強調するために, $(g \circ f)(x)$ と書くこともある.

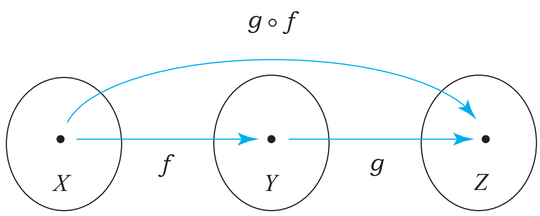


図 4.4: 合成写像 $g \circ f$

**例 4.7** 2 つの写像 $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ が $f(x) = 3x$, $g(x) = \sin x$ で与えられているとき,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sin(3x), \qquad f \circ g(x) = f(g(x)) = 3 \sin x$$

**定 理 4.8** 2 つの写像 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ の合成写像 $g \circ f$ について次が成り立つ.

(1) $f, g$ ともに単射なら $g \circ f$ も単射である.

(2) $f, g$ ともに全射なら $g \circ f$ も全射である.

**証 明** (1) $x_1, x_2 \in X$ が $x_1 \neq x_2$ を満たすものとする. $f$ が単射なので, $f(x_1) \neq f(x_2)$ である. そうすると, $g$ も単射なので $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ である. つまり, $g \circ f$ は単射である.

(2) $g$ が全射であるから, 任意の $z \in Z$ に対して, ある $y \in Y$ で $z = g(y)$ となる. $f$ が全射であるから, この $y$ に対して, ある $x \in X$ で $y = f(x)$ と書ける. したがって, $z = g(y) = g(f(x))$ となる. このことは, $g \circ f$ が全射であることを示す. ∎

**定 理 4.9** 2つの写像 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ の合成写像 $g \circ f$ について次が成り立つ.

(1) $g \circ f$ が単射ならば $f$ も単射である.

(2) $g \circ f$ が全射ならば $g$ も全射である.

**証 明** (1) $x_1, x_2 \in X$ として, $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ であることを示せばよい. $f(x_1) = f(x_2)$ より,

$$g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g \circ f(x_2)$$

である. $g \circ f$ が単射であるから, $x_1 = x_2$ が従う.

(2) 任意の $z \in Z$ をとる. $g \circ f$ が全射であるから, $z = g \circ f(x)$ を満たす $x \in X$ が存在する. $y = f(x)$ とおくと, $y \in Y$ であって,

$$z = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y)$$

となる. つまり, 任意の $z$ は $g$ の像であり, $g$ が全射であることがわかる. ∎

**定 理 4.10 (結合法則)** 3つの写像 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$, $h : Z \longrightarrow W$ に対して,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \tag{4.11}$$

**証 明** $x \in X$ に対して, 合成写像の定義にとって,

$$h \circ (g \circ f)(x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x))).$$

同様に,

$$(h \circ g) \circ f(x) = h \circ g(f(x)) = h(g(f(x))).$$

したがって, すべての $x \in X$ に対して, $h \circ (g \circ f)(x) = (h \circ g) \circ f(x)$ なので, (4.11) が成り立つ. ∎

**問 4.5** 写像 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ で次の性質をもつような例を示せ.

(1) $f$ が単射であって, $g \circ f$ が単射でない.

(2) $g$ が全射であって, $g \circ f$ が全射でない.

**問 4.6** 写像 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ で次の性質をもつような例を示せ.

(1) $g \circ f$ が全射であって, $f$ が全射でない.

(2) $g \circ f$ が単射であって, $g$ が単射でない.

**問 4.7** 写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対して次が成り立つことを示せ.

$$f \circ i_X = i_Y \circ f = f.$$

## 4.4 逆写像

写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全単射であるとき, 任意の $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となるような $x \in X$ がただ 1 つだけ存在する. したがって, $y$ に対してそのような $x$ を対応させることで, $Y$ から $X$ への写像が定義できる. これを $f$ の**逆写像**といい, $f^{-1}$ で表す.

**定 理 4.11** 全単射 $f : X \longrightarrow Y$ に対して,

$$f^{-1} \circ f = i_X\,, \qquad f \circ f^{-1} = i_Y \tag{4.12}$$

が成り立つ. したがって, $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ も全単射であり,

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

が成り立つ.

**証 明** 逆写像の定義から, 任意の $y \in Y$ に対して, $y = f(x)$ を満たす $x \in X$ が一意的に存在して $f^{-1}(y) = x$ となる. このとき,

$$y = f(x) = f(f^{-1}(y)) = f \circ f^{-1}(y), \qquad y \in Y,$$

が成り立ち, $f \circ f^{-1} = i_Y$ がわかる. 同様に, 任意の $x$ に対して, $y = f(x)$ とすると逆写像の定義から,

$$x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1} \circ f(x), \qquad x \in X,$$

が成り立つ. すなわち, $f^{-1} \circ f = i_X$ である. こうして, (4.12) が示された.

定理 4.9 によって, (4.12) の初めの等式から $f^{-1}$ が全射であること, 2 番目の等式から $f^{-1}$ が単射であることがわかる. そうすると, $f^{-1}$ の逆写像が考えられるが, 逆写像の定義から, それが $f$ であることは明らか. あるいは, (4.12) からもわかる (定理 4.12 参照). ∎

次に述べるように, (4.12) は逆写像を特徴づける.

**定 理 4.12** 2 つの写像 $f : X \longrightarrow Y$ と $g : Y \longrightarrow X$ が

$$g \circ f = i_X\,, \qquad f \circ g = i_Y\,, \tag{4.13}$$

を満たせば, $f, g$ ともに全単射であって, $f^{-1} = g$, $g^{-1} = f$ が成り立つ.

**証 明** 定理 4.9 を $g \circ f = i_X$ に適用すると, $g$ が全射, $f$ が単射であることがわかる. 同様に, $f \circ g = i_Y$ からは $f$ が全射, $g$ が単射であることがわかる. したがって, $f, g$ ともに全単射である. まず, $f : X \longrightarrow Y$ が全単射であることから, 逆写像 $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ が定義される. その定義は, 任意の $y \in Y$ に対して, $y = f(x)$ を満たす $x$ が一意に定まるので, $f^{-1}(y) = x$ とする. 一方, $g \circ f = i_X$ であるから,

$$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = i_X(x) = x.$$

したがって, $g = f^{-1}$ である. 同様にして, $g : Y \longrightarrow X$ が全単射であることから $f = g^{-1}$ がわかる. ∎

**定 理 4.13** 写像 $f : X \longrightarrow Y$ について次の 2 条件は同値である:

(i) $f$ は全単射である.

(ii) 写像 $g : Y \longrightarrow X$ で $g \circ f = i_X$, $f \circ g = i_Y$ を満たすものが存在する.

このとき, $g$ も全単射であって, $f^{-1} = g$ となる.

**証 明** (i) ⇒ (ii). $f$ が全単射であるから, その逆写像 $f^{-1}$ が存在する. そうすれば, $g = f^{-1}$ が望むべく性質を持つ.

(ii) ⇒ (i). 定理 4.12 から明らか. ∎

**定 理 4.14 (合成写像の逆写像)** 2 つの写像 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ がともに全単射であれば, 合成写像 $g \circ f$ も全単射であり, 次が成り立つ.

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \tag{4.14}$$

**証 明** $\varphi = g \circ f$, $\psi = f^{-1} \circ g^{-1}$ とおくと, $\varphi : X \longrightarrow Z$, $\psi : Z \longrightarrow X$ である. 写像の結合法則によって,

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi &= \psi \circ (g \circ f) = (\psi \circ g) \circ f \\ &= ((f^{-1} \circ g^{-1}) \circ g) \circ f = (f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g)) \circ f \end{aligned}$$

となる．ここで, $g^{-1} \circ g = i_Y$ と $f^{-1} \circ i_Y = f^{-1}$ を用いると,

$$\psi \circ \varphi = (f^{-1} \circ i_Y) \circ f = f^{-1} \circ f = i_X$$

が得られる．同様にして, $\varphi \circ \psi = i_Z$ もわかる．したがって, 定理 4.12 によって, $\varphi^{-1} = \psi$ がわかる．これは, (4.14) を意味する． ■

写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対して, 等式 $g \circ f = i_X$, $f \circ g = i_Y$ の一方だけを満たす $g$ の存在についても興味深い (定理 4.12, 定理 4.13 と比較せよ).

**定 理 4.15** $X, Y$ を集合として, $X \neq \emptyset$ とする．単射 $f : X \longrightarrow Y$ に対して, 全射 $g : Y \longrightarrow X$ で $g \circ f = i_X$ となるものが存在する．

**証 明** 写像 $f$ による $X$ の像集合を $Y_1 = f(X)$ とおき, 写像 $f_1 : X \longrightarrow Y_1$ を $f_1(x) = f(x)$ で定義する．明らかに, $f_1$ は全単射であるから, 逆写像 $f_1^{-1} : Y_1 \longrightarrow X$ が存在する．一方, $X \neq \emptyset$ なので $a_0 \in X$ を 1 つ取って, 写像 $g : Y \longrightarrow X$ を

$$g(y) = \begin{cases} f_1^{-1}(y), & y \in Y_1\,, \\ a_0, & y \in Y \setminus Y_1\,, \end{cases}$$

で定義する．このとき, 任意の $x \in X$ に対して,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f_1(x)) = f_1^{-1}(f_1(x)) = x$$

が成り立つので, $g \circ f = i_X$ となる．このとき, $g$ は全射である (定理 4.9). ■

**定 理 4.16** $X, Y$ を集合として, $Y \neq \emptyset$ とする．全射 $f : X \longrightarrow Y$ に対して, 単射 $g : Y \longrightarrow X$ で $f \circ g = i_Y$ となるものが存在する．

上の主張は定理 4.15 と対になる．写像 $f : X \longrightarrow Y$ は全射であるから, 任意の $y \in Y$ に対して,

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X \mid f(x) = y\} \neq \emptyset$$

である．そこで, $f^{-1}(\{y\})$ から元を 1 つ取り出して, それを $y$ に対応させることで, 写像 $g : Y \longrightarrow X$ を定義する．このとき, $g(y) \in f^{-1}(\{y\})$ なので $f(g(y)) = y$, つまり $f \circ g = i_Y$ が成り立つ．そうすると, 定理 4.9 によって, $g$ は単射になることがわかり, この $g : Y \longrightarrow X$ が求める写像になる．

一見して, 上の議論に問題があるようには思えないのだが, 実は, 選択公理という落とし穴がある. 写像 $g$ を定義するために, 「$f^{-1}(\{y\})$ から元を 1 つ取り出して, それを $y$ に対応させる」のだが, このような操作ができる根拠が選択公理なのである. 選択公理は, 集合論の最も基本的な公理 (ZF 公理系) とは独立なので, それを使う場合ははっきりと認識するのがよい. 正当な証明は第 11.2 節で与える (定理 11.2).

**■ 逆写像と逆像** 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全単射とは限らなくとも, $B \subset Y$ の $f$ による逆像 $f^{-1}(B)$ はいつでも定義される. 一方, $f$ が全単射であれば, 逆写像 $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ が定義されるので, 記号 $f^{-1}(B)$ は $f$ による $B$ の逆像の意味なのか, 逆写像 $f^{-1}$ による $B$ の像なのか区別できない. 幸いなことに, それらは一致するので, 共通の記号 $f^{-1}(B)$ を用いても問題はない. 実際, $f$ が全単射のときは,

$$\{f^{-1}(y) \mid y \in B\} = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

が容易に確かめられる. さらに, $B$ がただ 1 つの元からなる集合 $B = \{y\}$ のときは, $f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$ が成り立つので, 記号の乱用に寛大である.[3)]

**問 4.8** $f(x) = 2x + 6$ で定義される写像 $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ は全単射であることを示し, 逆写像を求めよ.

**問 4.9** 2 つの写像 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ に対して, 次のことを示せ.
(1) 任意の $A \subset X$ に対して, $g \circ f(A) = g(f(A))$.
(2) 任意の $B \subset Z$ に対して, $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$.

**問 4.10** 写像 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = e^x$ で定義する. 写像 $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ で $g \circ f = i_{\mathbb{R}}$ となるものを求めよ.

**問 4.11** 写像 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^3 - 3x$ で定義する. 写像 $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ で $f \circ g = i_{\mathbb{R}}$ となるものを求めよ.

## 4.5 集合系

多数の集合を扱うための記法を導入しよう. そのために, まず, 列という概念を正しく理解することから始める.

[3)] 文献によっては, 記号の乱用を嫌って, 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が与えられたとき, $A \subset X$ の $f$ による像 (特に, 順像と呼ぶ) を $f_*(A)$ と書き, $B \subset Y$ の $f$ による逆像を $f^*(B)$ と書くものもある.

■ **元の列** 集合 $X$ の元を (重複を許して) 並べたものを**列**という．$n$ 項からなる有限列なら,

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ \ldots, a_n, \tag{4.15}$$

無限列なら

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots, a_n,\ \ldots \tag{4.16}$$

のように書かれ, 様々な文脈に現れる．たとえば, $X = \mathbb{R}$ であれば, 実数列と呼ばれるものに他ならない．

確かに, 表記法として (4.15) や (4.16) は直感的でわかりやすいが, 正式には写像で定義する．定義域を $[n]$ とする写像 $k \mapsto a_k$ を $n$ 項からなる有限列といい, 定義域を $\mathbb{N}$ とする写像 $n \mapsto a_n$ を無限列という．つまり, (4.15) や (4.16) は写像 $a$ の像を定義域の自然数の順序にしたがって列挙したものと理解する．そうすると, 論理の展開においては, 列という言葉は不要になるのだが, 元が一列に並んでいるという状況を念頭におくのが有効な場合も多い．その場合は,

$$(a_k \,|\, k \in [n]) = (a_k \,|\, 1 \le k \le n), \qquad (a_n \,|\, n \in \mathbb{N}), \tag{4.17}$$

のように書くことも多い．列としての表記に現れる「$\ldots$」の曖昧さも避けることができて好都合である．一方, 写像 $k \mapsto a_k$ や $n \mapsto a_n$ の像集合は

$$\{a_k \,|\, k \in [n]\} = \{a_k \,|\, 1 \le k \le n\}, \qquad \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \tag{4.18}$$

で表される．(4.17) とは異なる概念であるから注意しよう．[4)]

■ **集合系** 上で述べた列の記法は全く一般的なものであって, 特に, $X = \mathcal{A}$ が集合族の場合, つまり $\mathcal{A}$ が集合を元とする集合の場合は, 集合の列を扱うことになる．つまり, 集合の有限列

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots, A_n,$$

なら定義域を $[n]$ とする写像 $k \mapsto A_k$ として扱い, 集合の無限列

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

なら定義域を $\mathbb{N}$ とする写像 $n \mapsto A_n$ として扱うことになる．この観点をさらに一般化して, 多数の集合を自由に扱えるようにしたものが**集合系**である．

4) 文献によっては, 集合の記号を流用して (4.18) を列の意味に用いている．実際, 集合して扱うのか列として扱うのかは, 文脈から明らかなことが多いのであまり問題はない．

あらためて, $\mathcal{A}$ を集合族, つまり集合を元とする集合とする．空でない集合 $\Lambda$ からある集合族 $\mathcal{A}$ への写像

$$A : \Lambda \longrightarrow \mathcal{A}, \qquad \lambda \mapsto A_\lambda \tag{4.19}$$

を $\Lambda$ 上の**集合系** といい, しばしば,

$$(A_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda) \quad \text{あるいは} \quad (A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \tag{4.20}$$

のように書く．ここで, $\lambda$ を**添字**, $\Lambda$ を**添字集合**という．写像 $A$ は単射とは限らないので, $\lambda \neq \mu$ であっても $A_\lambda = A_\mu$ となりうることに注意しよう．集合の列は, 添字集合として自然数の集合 $[n]$ や $\mathbb{N}$ をとったものに他ならない．あるいは, 自然数とは限らない添字も扱えるようにして列を一般化したものが集合系であると言ってもよい．

**例 4.17** 自然数 $n \in \mathbb{N}$ の約数の集合を $A_n$ とする．このとき, $(A_n | n \in \mathbb{N})$ は $\mathbb{N}$ 上の集合系であり, これを $A_1, A_2, \ldots$ と順に配列すれば, 集合の無限列になる．

**例 4.18** $\Lambda = [1, +\infty) = \{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, \lambda \geq 1\}$ として, $\lambda \in \Lambda$ に対して,

$$A_\lambda = \left[0, 1 - \frac{1}{\lambda}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{\lambda}\right\}$$

とおく．このとき, $(A_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ は $\Lambda$ 上の集合系である．自然数ではない添字が使われているので, $A_\lambda$ を集合の列とは呼ばない．

**例 4.19** $X$ を集合として, べき集合を $\Lambda = 2^X$ とおく．各 $\lambda \in \Lambda$ に対して, $A_\lambda = \{S \,|\, S \subset \lambda\}$ とおくと, $A_\lambda \subset 2^X$ となる．このとき, $(A_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ は $\lambda$ 上の集合系になる．もはや添字は数ではないことに注意しよう．

■ **集合族と集合系** これらは混同されがちであるが, 厳密には異なる．集合系 $(A_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda)$ とは, 写像 $A : \Lambda \longrightarrow \mathcal{A}$ のことである．一方, 写像 $A$ の像は

$$\{A_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\} \tag{4.21}$$

で与えられるが, これは集合族である．つまり, $A_\lambda$ の形で得られる集合を集めてできる集合であって, $A$ が単射でないときに生じる重複は考慮されない．一方, 集合系では写像 $A$ を扱うので, 重複も考慮される．実際, 集合系は順序対 $(\lambda, A_\lambda)$ の集合

$$\{(\lambda, A_\lambda) \,|\, \lambda \in \Lambda\} \tag{4.22}$$

と同等な概念であり, こちらを見れば, (4.21) と (4.22) の違いは明らかである.

また, 集合族 $\mathcal{A}$ は, それ自身を添字集合とする集合系として扱うことができる. 詳しく述べると, $\Lambda=\mathcal{A}$, $A=i_{\mathcal{A}}$ (恒等写像) とすれば, $\mathcal{A}$ 上の集合系

$$(i_{\mathcal{A}}(A)|A\in\mathcal{A})=(A|A\in\mathcal{A})$$

が定義される. これを (4.22) にしたがって集合族とみなすと, $\{(A,A)\,|\,A\in\mathcal{A}\}$ が得られ, $A$ を $(A,A)$ と表現する違いを除いて, 元の集合族 $\mathcal{A}$ が復元される.

■ **和集合と積集合** 集合系 $(A_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda)$ に対して少なくとも 1 つの $A_\lambda$ に含まれる元をすべて集めたものをその**和集合**または**合併集合**といい,

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda \quad \text{あるいは簡単に} \quad \bigcup_{\lambda}A_\lambda \tag{4.23}$$

と書く. また, すべての $A_\lambda$ に共通に含まれる元の全体を, その**積集合**または**共通部分**といい,

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda \quad \text{あるいは簡単に} \quad \bigcap_{\lambda}A_\lambda \tag{4.24}$$

で表す. 集合族を $\mathcal{A}=\{A_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ で定めるとき, (4.23) は $\mathcal{A}$ に属する集合すべての和集合, (4.24) は $\mathcal{A}$ に属する集合すべての積集合である. このとき,

$$\bigcup\mathcal{A}, \qquad \bigcap\mathcal{A},$$

のような記号も用いる. 和集合と積集合に関しては, 集合系であっても集合族であっても違いが見えない.

第 3.1 節で述べたように, 集合の列 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ に対して, 和集合と積集合

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{k=1}^{n}A_k\,, \tag{4.25}$$

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{k=1}^{n}A_k \tag{4.26}$$

が演算 $\cup$ あるいは $\cap$ の繰り返しで定義される. もちろん, 交換法則によって $A_1,A_2,\ldots,A_n$ の順序を任意に入れ替えても得られる集合は同じである. 一方で, 集合の列 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ は, $\Lambda=\{1,2,\ldots,n\}$ 上の集合系とみなされるから, 集合系としての和集合と積集合が (4.23) と (4.24) によって定義される. 見

かけ上は, 和集合と積集合がそれぞれ 2 通りの方法で定義されることになるが, 得られる集合は一致するので問題はない.

さらに, $\mathbb{N}$ 上の集合系 $(A_n|n \in \mathbb{N})$ は, 集合の無限列 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ に他ならない. このとき, 集合系として和集合と積集合が定義されるが, それらを

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\,, \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

のようにも書く. 右辺は無限級数を思い起こさせるが, 演算 $\cup, \cap$ を無限回繰り返すものではなく, 有限回の演算を施してから極限をとるというものでもない.

次の法則は定義から容易に示される.

**定理 4.20 (集合系に対する分配法則)** 集合系 $(A_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ と集合 $B$ に対して, 次が成り立つ.

$$\Bigl(\bigcup_{\lambda} A_\lambda\Bigr) \cap B = \bigcup_{\lambda}(A_\lambda \cap B), \qquad \Bigl(\bigcap_{\lambda} A_\lambda\Bigr) \cup B = \bigcap_{\lambda}(A_\lambda \cup B).$$

**定理 4.21 (集合系に対するド・モルガンの法則)** 全体集合 $X$ の部分集合からなる集合系 $(A_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ に対して, 次が成り立つ.

$$\Bigl(\bigcup_{\lambda} A_\lambda\Bigr)^c = \bigcap_{\lambda} A_\lambda^c, \qquad \Bigl(\bigcap_{\lambda} A_\lambda\Bigr)^c = \bigcup_{\lambda} A_\lambda^c.$$

**問 4.12** 例 4.17 で定義した集合系 $(A_n|n \in \mathbb{N})$ の和集合と積集合を求めよ.

**問 4.13** 例 4.18 で定義した集合系 $(A_\lambda\,|\,\lambda \in \Lambda)$ に対して, $\lambda < \mu$ ならば $A_\lambda \subset A_\mu$ であることを示し, その和集合を求めよ.

**問 4.14** $\lambda \in [1, +\infty)$ に対して,

$$B_\lambda = \Bigl[0, 1 + \frac{1}{\lambda}\Bigr) = \Bigl\{x \in \mathbb{R}\,\Big|\, 0 \leq x < 1 + \frac{1}{\lambda}\Bigr\}$$

とおく. 集合系 $(B_\lambda\,|\,\lambda \in \Lambda)$ に対して, $\lambda < \mu$ ならば $A_\mu \subset A_\lambda$ であることを示し, その積集合を求めよ.