第6章　有限集合

無限集合に関する議論に備えて, 有限集合の基本的な性質を見直しておく. 直感的には明らかな内容が多いが, 集合と写像を用いて順に導いているところに注意して欲しい.

6.1　元の個数

集合 A の元の個数を知るためにはどうすればよいのだろうか. 素朴には, A の元を 1 つずつ指さしながら, $1, 2, 3, \ldots$ と順に自然数を唱えて, ちょうど n で唱え終わったとき, その集合は n 個の元からなる有限集合であることがわかる. このことを数学的に述べれば, $\{1, 2, \ldots, n\}$ から A への全単射 f を見出したことにほかならない. 実際, 番号を唱えるときに番号を飛ばしてはいけないが, このことは, すべての番号 k に対して A の元を対応させていることを意味する. つまり, 写像 f の定義域が $\{1, 2, \ldots, n\}$ であることを言っている. さらに, 元を重複することなく, すべてを数え尽くさなければならないが, そのことは写像 f が単射かつ全射であることを意味する.

以後, 簡単のため, 自然数 $\mathbb{N}$ に 0 を追加した集合を

$$\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

とおく. つまり, $\mathbb{N}_0$ は非負の整数の集合である. さらに, $n \in \mathbb{N}_0$ に対して,

$$[n] = \begin{cases} \{1, 2, \ldots, n\}, & n \geq 1, \\ \emptyset, & n = 0, \end{cases}$$

とおく. 上の議論から, 空でない集合 A の元の個数は, 全単射 $f : [n] \longrightarrow A$ が存在するような n として求められることがわかる. しかしながら, これを定義として採用するには, n が一意的に定まることを証明しておく必要がある.

補 題 6.1 $m, n \in \mathbb{N}_0$ とする.

(1) もし単射 $f : [n] \longrightarrow [m]$ が存在すれば, $n \leq m$ である.

(2) もし全射 $f : [n] \longrightarrow [m]$ が存在すれば, $n \geq m$ である.

(3) もし全単射 $f : [n] \longrightarrow [m]$ が存在すれば, $n = m$ である.

証 明　ここで「個数」を持ち出してはいけない. 個数の定義のための主張だからである. では, (1) を n についての数学的帰納法で示そう. まず, $n = 0$ のときは自明である. 実際, すべての $m \in \mathbb{N}_0$ に対して $0 \leq m$ が成り立つからである. 次に, $n \geq 0$ として, 主張が n まで成立していると仮定する. 与えられた単射 $f : [n+1] \longrightarrow [m]$ について, 2 通りに場合分けして扱う.

(i) $f(n+1) = m$ の場合. $k \in [n]$ に対して, $g(k) = f(k)$ として写像 g を定義する. 仮定から f は単射で $f(n+1) = m$ を満たすので, $g : [n] \longrightarrow [m-1]$ は単射になる. 帰納法の仮定から, $n \leq m-1$, つまり $n+1 \leq m$ が得られる.

(ii) $f(n+1) \neq m$ の場合. 写像 $h : [m] \to [m]$ を

$$h(k) = \begin{cases} m, & k = f(n+1) \text{ のとき}, \\ f(n+1), & k = m \text{ のとき}, \\ k, & \text{その他}, \end{cases}$$

で定義すると, h は全単射になることが容易にわかる. そうすると, 合成写像 $h \circ f : [n+1] \longrightarrow [m]$ は単射になり, $h \circ f(n+1) = m$ が成り立つ. $h \circ f$ に対して (i) の議論を適用すると, $n+1 \leq m$ が得られる.

いずれの場合も, $n+1 \leq m$ が成り立ち, $n+1$ のときの主張が示された.

(2) は読者に委ねる (問 6.1). (3) は (1) と (2) からの帰結である. ∎

上の証明では, 自然数の順序, 自然数の加法, 数学的帰納法を用いている. これらは自然数の根源的な性質 (公理) に由来する (第 13 章).

問 6.1 $m, n \in \mathbb{N}_0$ に対して, 全射 $f : [n] \longrightarrow [m]$ が存在すれば $n \geq m$ であることを n についての数学的帰納法で示せ [補題 6.1 (2)].

定 理 6.2 A を集合とする. 2 つの $m, n \in \mathbb{N}_0$ に対して全単射

$$f : [n] \longrightarrow A, \qquad g : [m] \longrightarrow A$$

が存在すれば, $m = n$ である.

証 明 $g : [m] \longrightarrow A$ は全単射であるから, 逆写像 $g^{-1} : A \longrightarrow [m]$ も全単射である. そうすると, 全単射 f との合成写像 $g^{-1} \circ f : [n] \longrightarrow [m]$ も全単射になる. したがって, 補題 6.1 から $m = n$ が従う. ∎

定 義 6.3 集合 A に対して, $n \in \mathbb{N}_0$ と全単射 $f : [n] \longrightarrow A$ が存在するとき, A を**有限集合**という. このとき, n は一意的に定まり, $|A| = n$ と書いて, A の元の個数という.

上の定義によって, 有限集合 A を取り扱うときは, その元に番号を付けて

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \tag{6.1}$$

と書いてよい. ただし, n は A の元の個数であって, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が互いに異なることは暗黙の了解となる.

定 義 6.4 有限集合でない集合を**無限集合**という.

こうして, すべての集合は有限集合であるか, 無限集合であるかのいずれかに分類される. 上の定義 6.4 は, それはそれでよいのだが, 否定による定義であるため, いささか不満を覚えるかもしれない. つまり, もっと積極的な性質によって無限集合を定義することはできないのかという疑問がわく. 一方, 有限集合の定義 6.3 においても, 自然数を用いることなく, 集合の性質で特徴づけることはできないかと問うこともできる. 実際, そのような方向の研究は集合論に多くの成果を生み出した. 第 11.4 節で少し触れることにする.

以下では, 有限集合の基本的な性質を定義 6.3 をもとに順に導出する.

定 理 6.5 $n \in \mathbb{N}_0$ に対して, $[n]$ は有限集合であって, $|[n]| = n$ が成り立つ.

証 明 定義 6.3 の f として恒等写像 $i : [n] \longrightarrow [n]$ をとればよい. ∎

定 理 6.6 空集合 $\emptyset$ は有限集合であり, $|\emptyset| = 0$ となる. 逆に, 集合 A が $|A| = 0$ を満たせば, $A = \emptyset$ である.

証 明 定義によって $[0] = \emptyset$ であり, $[0] \longrightarrow \emptyset$ となる写像が 1 つ存在し, それは全単射である (問 4.4). よって, $\emptyset$ は有限集合であり, $|\emptyset| = 0$ がわかる.

逆に, $|A| = 0$ とすると, 定義によって, 全単射 $f : [0] \longrightarrow A$ が存在する. $A \neq \emptyset$ のときは, 写像 $f : [0] = \emptyset \longrightarrow A$ がただ 1 つ存在するが, それは全射ではない. したがって, $A = \emptyset$ である. ∎

■ 元の個数の比較

定 理 6.7 有限集合 A, B に対して, 次の 2 つの性質は同値である.

(i) $|A| = |B|$.
(ii) 全単射 $f : A \longrightarrow B$ が存在する.

証 明 (i) $\Rightarrow$ (ii). $|A| = |B| = n$ とする. 定義によって, 全単射 $f : [n] \longrightarrow A$ と $g : [n] \longrightarrow B$ が存在する. 合成写像 $g \circ f^{-1} : A \to B$ は全単射である.

(ii) $\Rightarrow$ (i). $|A| = n$ とすると, 全単射 $g : [n] \longrightarrow A$ が存在する. 合成写像 $f \circ g : [n] \longrightarrow B$ は全単射になる. したがって, $|B| = n = |A|$ がわかる. ∎

上の定理 6.7 は重要である. 2 つの有限集合に対して, 元を直接数えることなく, 全単射の存在さえわかれば, 同数の元をもつことがわかると言っている. この観点が無限集合に拡張されて, 濃度を導入する鍵となる (第 7 章).

次の結果も有用である.

定 理 6.8 A を有限集合, B を任意の集合とする. 全単射 $f : A \longrightarrow B$ が存在すれば, B も有限集合で $|A| = |B|$ が成り立つ.

問 6.2 定理 6.8 を証明せよ.

定 理 6.9 有限集合 A, B に対して, 次の 2 つの性質は同値である.

(i) $|A| \leq |B|$.
(ii) 単射 $f : A \longrightarrow B$ が存在する.

証 明 A は有限集合であるから, $|A| = m$ として全単射 $g : [m] \longrightarrow A$ が存在する. 同様に, $|B| = n$ として全単射 $h : [n] \longrightarrow B$ が存在する.

(i) $\Rightarrow$ (ii). 仮定から $m \leq n$ であるから, 写像 $i : [m] \longrightarrow [n]$ を $i(k) = k$ で定義すると単射になる. そうすると, 合成写像 $h \circ i \circ g^{-1} : A \longrightarrow B$ が単射になる.

(ii) $\Rightarrow$ (i). 合成写像 $h^{-1} \circ f \circ g : [m] \longrightarrow [n]$ が単射になる. 補題 6.1 (1) によって, $m \leq n$ がわかる. ∎

■ **部分集合** 有限集合の部分集合が有限集合であることは, 直感的に明らかではあるが, ここでは定義にもとづいて証明しよう.

補 題 6.10 $n \in \mathbb{N}_0$ とする. 部分集合 $A \subset [n]$ は有限集合であり, $|A| \leq n$ が成り立つ.

証 明 n に関する数学的帰納法を用いる．まず, $n=0$ のとき主張が成り立つことを示す．$[n]=[0]=\emptyset$ であり, その部分集合は $A=\emptyset$ だけである．定理 6.6 によって, $\emptyset$ は有限集合であって $|\emptyset|=0$ であるから, 確かに主張は成り立つ．

次に, $n \geq 0$ として n まで主張が成り立つことを仮定する．部分集合 $A \subset [n+1]$ について, 2 通りに場合分けをして扱う．

(i) $n+1 \in A$ の場合．$A \subset [n+1]$ から $A \backslash \{n+1\} \subset [n]$ となる．帰納法の仮定によって, $A \backslash \{n+1\}$ は有限集合であって $|A \backslash \{n+1\}| \leq n$ である．そこで, $|A \backslash \{n+1\}| = m$ とおいて, 全単射 $f:[m] \longrightarrow A \backslash \{n+1\}$ をとる．ここで,

$$g(k) = \begin{cases} f(k), & k \in [m], \\ n+1, & k = m+1, \end{cases}$$

によって定義される写像 $g:[m+1] \longrightarrow A$ は全単射になることが容易に示される．したがって, A は有限集合であり, $|A| = m+1 \leq n+1$ が成り立つ．

(ii) $n+1 \notin A$ の場合．$A \subset [n]$ となる．帰納法の仮定によって, A は有限集合であって $|A| \leq n$ であるから, 当然, $|A| \leq n+1$ である．

(i), (ii) より $|A| \leq n+1$ が導かれたので, 数学的帰納法の証明が終わる． ■

定 理 6.11 $A \subset B$ で B が有限集合であれば, A も有限集合であり, $|A| \leq |B|$ が成り立つ．

証 明 B は有限集合なので, $|B|=n$ として全単射 $f:[n] \longrightarrow B$ を選んでおく．$A_1 = f^{-1}(A)$ とおくと $A_1 \subset [n]$ であるから, 補題 6.10 によって, A_1 は有限集合であって, $|A_1| \leq n$ が成り立つ．一方, 写像 $f_1 : A_1 \longrightarrow A$ を $f_1(k) = f(k)$ で定義すれば, f_1 は全単射である．定理 6.8 によって, A も有限集合で $|A| = |A_1|$ となる．先の不等式 $|A_1| \leq n$ と合わせて $|A| \leq |B|$ がわかる． ■

6.2 和集合

定 理 6.12 A, B を有限集合とする．もし, $A \cap B = \emptyset$ であれば, $A \cup B$ も有限集合であって, 次が成り立つ．

$$|A \cup B| = |A| + |B|. \tag{6.2}$$

証 明　仮定によって, $|A| = m$, $|B| = n$ とすると全単射 $g : [m] \longrightarrow A$ と $h : [n] \longrightarrow B$ が存在する. 新たに写像 $f : [m+n] \longrightarrow A \cup B$ を

$$f(k) = \begin{cases} g(k), & 1 \leq k \leq m \text{ のとき}, \\ h(k-m), & m+1 \leq k \leq m+n \text{ のとき}, \end{cases}$$

で定義すると, $f : [m+n] \longrightarrow A \cup B$ は全単射になることが容易にわかる. したがって, $A \cup B$ は有限集合であって, (6.2) が成り立つ. ∎

補 題 6.13　有限集合 A, B に対して次が成り立つ.

$$|A \backslash B| = |A| - |A \cap B|. \tag{6.3}$$

証 明　$A_1 = A \backslash B$, $A_2 = A \cap B$ とおくと, $A = A_1 \cup A_2$ かつ $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ が成り立つ. ここで, 定理 6.12 を適用すると,

$$|A| = |A_1| + |A_2| = |A \backslash B| + |A \cap B|.$$

移項して, (6.3) を得る. ∎

定 理 6.14　A, B が有限集合であれば, 和集合 $A \cup B$ も有限集合であって, 次が成り立つ.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{6.4}$$

証 明　$A_1 = A \backslash B$ とおけば, $A \cup B = A_1 \cup B$ かつ $A_1 \cap B = \emptyset$ が成り立つ. したがって, 定理 6.12 によって,

$$|A \cup B| = |A_1 \cup B| = |A_1| + |B| = |A \backslash B| + |B|.$$

補題 6.13 によって $|A \backslash B| = |A| - |A \cap B|$ であるから,

$$|A \cup B| = |A \backslash B| + |B| = |A| - |A \cap B| + |B|$$

となり, (6.4) が示された. ∎

問 6.3　有限集合 A, B が $A \subset B$ を満たすとき, 次が成り立つことを示せ.

(1) $A = B \;\Leftrightarrow\; |A| = |B|$.

(2) $A \subsetneq B \;\Leftrightarrow\; |A| < |B|$.

定 理 6.15 n 個の有限集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ が互いに素であれば, つまり, $j \neq k$ なる限り $A_j \cap A_k = \emptyset$ であれば, それらの和集合 $\bigcup_{k=1}^n A_k$ は有限集合であって, 次が成り立つ.

$$\left|\bigcup_{k=1}^n A_k\right| = \sum_{k=1}^n |A_k|. \tag{6.5}$$

証 明 定理 6.12 を繰り返し適用すればよい. ∎

定 理 6.16 (包除原理) n 個の有限集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ に対して, それらの和集合 $\bigcup_{k=1}^n A_k$ は有限集合であって, 次が成り立つ.

$$\left|\bigcup_{k=1}^n A_k\right| = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_j \le n} \left|A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_j}\right|. \tag{6.6}$$

証 明 n に関する数学的帰納法による. まず, $n = 1$ のときは自明である. 次に, $n \geq 1$ として n までの主張が成り立っているものと仮定する. では, $n+1$ 個の有限集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ の和集合を考えよう. まず,

$$B = \bigcup_{k=1}^n A_k$$

とおいて, 定理 6.14 を適用すると,

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right| = |B \cup A_{n+1}| = |B| + |A_{n+1}| - |B \cap A_{n+1}| \tag{6.7}$$

となる. B は n 個の有限集合の和集合であるから, 帰納法の仮定によって,

$$|B| = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_j \le n} \left|A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_j}\right| \tag{6.8}$$

となる. 同様に,

$$B \cap A_{n+1} = \bigcup_{k=1}^n (A_k \cap A_{n+1})$$

も n 個の有限集合の和集合であるから, 帰納法の仮定によって,

$$|B \cap A_{n+1}| = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_j \le n} \left|A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_j} \cap A_{n+1}\right| \tag{6.9}$$

となる．(6.8) と (6.9) を (6.7) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
\left|\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right| &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sum_{1\le k_1<\cdots<k_j\le n}\left|A_{k_1}\cap\cdots\cap A_{k_j}\right| \\
&\quad + |A_{n+1}| \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sum_{1\le k_1<\cdots<k_j\le n}\left|A_{k_1}\cap\cdots\cap A_{k_j}\cap A_{n+1}\right| \qquad (6.10)
\end{aligned}
$$

となる．右辺の第 3 項を少し書き換えて

$$
\sum_{j=2}^{n+1}(-1)^{j-1}\sum_{1\le k_1<\cdots<k_{j-1}\le n}\left|A_{k_1}\cap\cdots\cap A_{k_{j-1}}\cap A_{n+1}\right|
$$

としておいて，(6.10) を少し変形すると，

$$
\begin{aligned}
\left|\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right| &= \sum_{k=1}^{n+1}|A_k| \\
&\quad + \sum_{j=2}^{n}(-1)^{j-1}\sum_{1\le k_1<\cdots<k_j\le n}\left|A_{k_1}\cap\cdots\cap A_{k_j}\right| \\
&\quad + \sum_{j=2}^{n}(-1)^{j-1}\sum_{1\le k_1<\cdots<k_{j-1}\le n}\left|A_{k_1}\cap\cdots\cap A_{k_{j-1}}\cap A_{n+1}\right| \\
&\quad + (-1)^n\left|A_1\cap\cdots\cap A_{n+1}\right|
\end{aligned}
$$

が得られる．ここで，第 2 項と第 3 項の内側の和は，$A_1,\dots,A_n,A_{n+1}$ から j 個選んで作った積集合を取り尽くすので，

$$
\left|\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right| = \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j-1}\sum_{1\le k_1<\cdots<k_j\le n+1}\left|A_{k_1}\cap\cdots\cap A_{k_j}\right|
$$

となる．これは，(6.6) が $n+1$ の場合にも成り立つことを示す． ■

例 6.17 定理 6.16 で $n=3$ の場合は，

$$
\begin{aligned}
|A_1\cup A_2\cup A_3| &= |A_1|+|A_2|+|A_3| \\
&\quad - |A_1\cap A_2| - |A_2\cap A_3| - |A_3\cap A_1| + |A_1\cap A_2\cap A_3|
\end{aligned}
$$

となる．この程度なら，ベン図 6.1 を眺めてもわかるだろう．

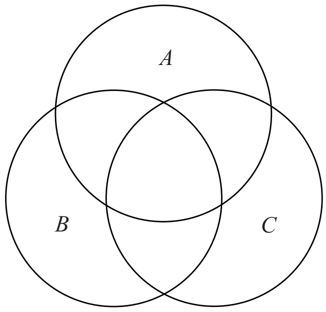

図 6.1: $A \cup B \cup C$

■ **引き出し原理** [1] 手紙を引き出しに入れて整理したい．引き出しの数が手紙の数より少なければ, どのような入れ方をするにせよ, 少なくとも 1 つの引き出しには必ず 2 通以上の手紙を入れることになる．手紙と引き出しを鳩と巣に置き換えて**鳩の巣原理**ともいう．全くもって明らかなことではあるが, 集合と写像を用いて述べれば, 次のようになる．

定 理 6.18 A, B を有限集合で $|A| > |B|$ を満たすものとする．このとき, 任意の写像 $f : A \longrightarrow B$ に対して, $y \in B$ で $|f^{-1}(y)| \geq 2$ を満たすものが存在する．

証 明 一般に,

$$A = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(\{y\})$$

が成り立ち, 右辺に現れる集合は互いに素であることに注意しよう．そうすると, 定理 6.15 によって,

$$|A| = \sum_{y \in B} |f^{-1}(y)| \tag{6.11}$$

が成り立つ．結論を否定すると, すべての $y \in B$ に対して $|f^{-1}(y)| \leq 1$ となる．そうすると, (6.11) から

$$|A| = \sum_{y \in B} |f^{-1}(y)| \leq \sum_{y \in B} 1 = |B|$$

[1] 数論において, ディリクレ (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805–1859. ドイツの数学者) が多用して有名になったので, ディリクレの名を冠して呼ぶことも多い．

となり, 仮定に $|A| > |B|$ に矛盾する．したがって, $y \in B$ で $|f^{-1}(y)| \geq 2$ を満たすものが存在する． ∎

6.3　有限集合と写像

有限集合間の写像, 有限集合と一般の集合との間の写像について, 基本的な性質をまとめておく．

補 題 6.19 A を有限集合, B を任意の集合とする．もし単射 $f : A \longrightarrow B$ が存在すれば, $f(A)$ は有限集合であり, $|f(A)| = |A|$ が成り立つ．

証 明　A が有限集合であるから, $|A| = n$ として全単射 $g : [n] \longrightarrow A$ が存在する．$B_1 = f(A)$ として, 写像 $f_1 : A \longrightarrow B_1$ を $f_1(x) = f(x)$ で定義すると, f_1 は全単射になる．そうすると, 合成写像 $f_1 \circ g : [n] \longrightarrow B_1$ が全単射になるので, B_1 は有限集合で $|B_1| = n$ となる．これが示したかったことである． ∎

定 理 6.20 A, B は有限集合で $|A| = |B|$ を満たすものとする．写像 $f : A \longrightarrow B$ について, 次の 3 条件は同値である．

(i) f は単射である．
(ii) f は全射である．
(iii) f は全単射である．

証 明　(i) ⇒ (ii)．f の像集合を $B_1 = f(A)$ とおくと, 補題 6.19 によって $|A| = |B_1|$ が成り立つ．一方, $B = B_1 \cup (B \backslash B_1)$ は互いに素な 2 つの有限集合の和集合であるから,

$$|B| = |B_1| + |B \backslash B_1| = |A| + |B \backslash B_1|$$

が成り立つ．仮定 $|A| = |B|$ を合わせると, $|B \backslash B_1| = 0$ となり, $B \backslash B_1 = \emptyset$ となる．したがって, $B_1 \subset B$ と合わせて $B = B_1 = f(A)$ がわかる．つまり, f は全射である．

(ii) ⇒ (iii)．定理 6.18 の証明にあるように, 一般に,

$$|A| = \sum_{y \in B} |f^{-1}(\{y\})|$$

が成り立つ．仮定 $|A| = |B|$ から

$$\sum_{y \in B} (|f^{-1}(\{y\})| - 1) = 0 \tag{6.12}$$

が得られる．一方, f は全射であるから, 任意の $y \in B$ に対して $|f^{-1}(\{y\})| \geq 1$ である．そうすると, (6.12) と合わせて, すべての $y \in B$ に対して, $|f^{-1}(\{y\})| = 1$ であることがわかる．これは f が単射であることを意味する．もとより, f は全射なので, それは全単射である．

(iii) $\Rightarrow$ (i) は定義により自明である． ∎

定 理 6.21 (有限集合への単射) A を任意の集合, B を有限集合とする．もし単射 $f : A \longrightarrow B$ が存在すれば, A も有限集合であり, $|A| \leq |B|$ が成り立つ．さらに, $f(A)$ も有限集合であり, $|f(A)| = |A|$ が成り立つ．

証 明 $B_1 = f(A)$ とおいて, 写像 $f_1 : A \longrightarrow B_1$ を $f_1(x) = f(x)$ で定義する．まず, B_1 は有限集合 B の部分集合であるから, 定理 6.11 によって, B_1 も有限集合であり,

$$|B_1| \leq |B| \tag{6.13}$$

が成り立つ．一方, 明らかに f_1 は全単射であるから, A も有限集合で $|A| = |B_1|$ となる．(6.13) と合わせて, $|A| \leq |B|$ がわかる．後半の主張は既に明らか． ∎

定 理 6.22 (有限集合からの全射) A を有限集合, B を任意の集合とする．もし 全射 $f : A \longrightarrow B$ が存在すれば, B も有限集合であり, $|B| \leq |A|$ が成り立つ．

証 明 A は有限集合なので, $|A| = n$ として全単射 $g : [n] \longrightarrow A$ が存在する．合成写像 $h = f \circ g : [n] \longrightarrow B$ は全射である．したがって, 各 $x \in B$ に対して $h^{-1}(\{x\}) \subset [n]$ は空集合ではない．そこで,

$$\varphi(x) = \min h^{-1}(\{x\}), \qquad x \in B,$$

とおくと, 写像 $\varphi : B \longrightarrow [n]$ が定義される．逆像 $h^{-1}(\{x\})$ は x が異なれば互いに素であるから, φ は単射である．定理 6.21 によって, B は有限集合であって, $|B| \leq |[n]| = n = |A|$ がわかる． ∎

6.4 直積集合

2 つの集合 A, B に対して, $x \in A$ と $y \in B$ を順序も考慮して組にしたものを (x, y) と書いて**順序対**といい, それらをすべて集めてできる集合

$$A \times B = \{(x, y) \,|\, x \in A,\ \ y \in B\}$$

を A と B の**直積 (集合)** と呼ぶのだった (第 4.1 節). 定義によって, 一般には, $A \times B \neq B \times A$ であることに注意しておこう.

定 理 6.23 有限集合 A, B の直積は有限集合であって, 次が成り立つ.

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|. \tag{6.14}$$

証 明　$|A| = m$ として, $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ とする. 各 $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して, $A \times B$ に部分集合を $C_i = \{(a_i, y) \,|\, y \in B\}$ で定義する. 明らかに, $|C_i| = |B|$ である. 一方, $C_1, \ldots, C_m$ は互いに素であって,

$$A \times B = \bigcup_{i=1}^{m} C_i$$

が成り立つから, 定理 6.15 によって,

$$|A \times B| = \sum_{i=1}^{m} |C_i| = m|B| = |A| \cdot |B|$$

が得られる. ∎

さて, 3 つの集合 A, B, C に対しては, 直積を 2 回とることによって,

$$(A \times B) \times C, \qquad A \times (B \times C)$$

が導入される. 定義にしたがうと, 前者の元は $((x, y), z)$, 後者の元は $(x, (y, z))$ となるが, ほとんどの文脈では, この 2 つを区別して扱う必要がないので, これを単に, (x, y, z) と書くことにする. 重要なことは, x, y, z がこの順序に並んでいることだけである. この規約に合わせて, 直積集合の方も

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

のように書くことにする. 一般に, n 個の集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ の直積 (集合) が,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in A_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\} \tag{6.15}$$

で定義される. なお, 同じ集合 A の n 個の直積は,

$$A^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in A,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

のように書く.

定 理 6.24 有限集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ の直積は有限集合であって, 次が成り立つ.

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|. \tag{6.16}$$

証 明 定理 6.23 を繰り返し適用すればよい. ∎

■ 写像の集合 集合 A から B への写像の集合を

$$\mathrm{Map}(A, B) = \{f \mid f : A \to B \text{ は写像 }\}$$

と書くことにする.

定 理 6.25 A, B が有限集合であれば, $\mathrm{Map}(A, B)$ も有限集合であって,

$$|\mathrm{Map}(A, B)| = |B|^{|A|} \tag{6.17}$$

が成り立つ. ただし, $0^0 = 1$ とする.

証 明 $|A| = m$ として, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ とおく. 写像 $f \in \mathrm{Map}(A, B)$ に対して,

$$\varphi(f) = (f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_m))$$

とおくと, 写像 $\varphi : \mathrm{Map}(A, B) \longrightarrow B^m$ が定義される. 写像 $f \in \mathrm{Map}(A, B)$ は A の各元 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ の像を指定することで一意的に定まるので, φ は全単射であることがわかる. また, 定理 6.24 によって, B^m は有限集合で $|B^m| = |B|^m$ であることに注意する. そうすると, $\mathrm{Map}(A, B)$ も有限集合で,

$$|\mathrm{Map}(A, B)| = |B^m| = |B|^m = |B|^{|A|}$$

が成り立つ. ∎

■ **べき集合** X を任意の集合とする．部分集合 $A \subset X$ に対して，

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases} \tag{6.18}$$

によって定義される関数 $\chi_A : X \longrightarrow \{0,1\}$ を集合 A の**定義関数**という．明らかに，$\chi_A \in \mathrm{Map}(X, \{0,1\})$ である．

補 題 6.26 X を任意の集合とする．対応 $A \mapsto \chi_A$ によって定義される写像 $\chi : 2^X \longrightarrow \mathrm{Map}(X, \{0,1\})$ は全単射である．

証 明　まず，単射であることを示す．$A, B \in 2^X$ が $A \neq B$ であるとする．そうすると，次の 2 通りの場合がある．

(i) $a \in A$, $a \notin B$ を満たす a が存在する．

(ii) $a \notin A$, $a \in B$ を満たす a が存在する．

(i) であれば，$\chi_A(a) = 1$, $\chi_B(a) = 0$ であるから，2 つの写像 χ_A と χ_B は異なる．(ii) でも同様であるから，$A \neq B$ ならば $\chi_A \neq \chi_B$ である．このことは，写像 $\chi : 2^X \to \mathrm{Map}(X, \{0,1\})$ が単射であることを示す．

次に，全射であることを示す．任意の $f \in \mathrm{Map}(X, \{0,1\})$ に対して，$A = f^{-1}(\{1\})$ をとれば，$A \in 2^X$ であって $f = \chi_A$ となることが容易にわかる．このことは，写像 $\chi : 2^X \to \mathrm{Map}(X, \{0,1\})$ が全射であることを示す． ■

定 理 6.27 A が有限集合であれば，そのべき集合 2^A も有限集合であって，次が成り立つ．

$$|2^A| = 2^{|A|}.$$

証 明　補題 6.26 と定理 6.25 によって，

$$|2^A| = |\mathrm{Map}(A, \{0,1\})| = |\{0,1\}|^{|A|} = 2^{|A|}$$

が得られ，証明が終わる． ■

問 6.4 集合 X の部分集合 A, B に対して，次の等式を示せ．

(1) $\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x)$.

(2) $\chi_{A \cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$.

(3) $\chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$.