(火曜 3 講時, 尾畑)

数理統計学・期末験問題 (2019.07.23)

- 教科書・参考書・ノート等の持ち込み不可
- 電卓は使用可
- 通信機能のついている時計・計算機等は使用禁止（カバンにしまう）
- 問題 [1]–[7] は答だけを記せ.
- 問題 [8]-[10] は解答に至るプロセスも記せ. なお, 解答欄が不足すれば裏面を用いよ.

[1] 次の問に答えよ.

(1) 52 枚のトランプから 4 枚のカードを抜き取ったとき, スペードのカードが 2 枚, ハートのカードが 1 枚含まれている確率を求めよ.

(2) 半径 $6R$ の円板から 1 点をランダムに選ぶとき, その点と円板の中心との距離を X とする. 条件付確率 $P(X > 2R \,|\, X \le 3R)$ を求めよ.

[2] 確率変数 X が $[-3, 3]$ 上の一様分布に従うものとする.

(1) $P(X^2 \le 1)$ を求めよ.

(2) X の分散 $\mathbf{V}(X)$ を求めよ.

[3] 確率変数 X, Y は独立で, それらの平均値と分散は

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) = \mu, \qquad \mathbf{V}(X) = \sigma^2, \quad \mathbf{V}(Y) = 2\sigma^2,$$

とする. ただし, $\sigma^2 \neq 0$ である. さらに, a, b, c を 0 でない定数として,

$$S = aX + bY, \qquad T = bX + cY$$

とおく.

(1) $\mathbf{E}(S)$ を求めよ.

(2) $\mathbf{E}(ST) = \mathbf{E}(S)\mathbf{E}(T)$ が成り立つための a, b, c の条件を求めよ.

[4] 必要なら付録 (裏面) の数表を用いて, 次の問に答えよ.

(1) $X \sim N(5, 3^2)$ のとき, $P(X \ge 3.47)$ を求めよ.

(2) $Y \sim t_{11}$ のとき, $P(Y \le a) = 0.01$ を満たす a を求めよ.

[5]　ある地区の有権者 1 万人から無作為抽出によって, 候補者 A の支持率を調べる.

(1) 大きさ 100 の標本比率が 32 %であった. この地区の支持率の 90% 信頼区間を求めよ.

(2) この地区の支持率の 90% 信頼区間の幅を 0.01 以下にするために必要な無作為標本の大きさを求めよ.

[6]　ある製品に対して抜き取り検査を行い, 6 個の無作為標本について,

$$12.6 \quad 14.2 \quad 11.4 \quad 13.3 \quad 12.2 \quad 12.8$$

を得た. (1) 平均値 と (2) 不偏分散を求めよ.

[7]　正規母集団から 9 個の無作為標本を取り出して調べたところ, 標本平均 $\bar{x} = 13.6$ が得られた.

(1) 母分散 $\sigma^2 = 2.6^2$ が既知であるとき, 母平均の 95% 信頼区間を求めよ.

(2) 母分散 σ^2 が未知であり, 標本から求めた不偏分散が $u^2 = 2.8^2$ であるとき, 母平均の 95% 信頼区間を求めよ.

[8]　2 つの壺 U_1, U_2 があって, U_1 には赤玉 5 個, 白玉 4 個, 黒玉 3 個, U_2 には赤玉 3 個, 白玉 2 個, 黒玉 1 個が入っている. いま, U_1 から 1 個の玉を取り出して U_2 に入れ, U_2 から 1 個の玉を取り出したところ黒玉であった. はじめに U_1 から取り出した玉が黒玉である確率を求めよ.

[9]　母集団から取り出された大きさ n の無作為標本 $X_1, \ldots, X_n$ に対して定義される標本平均

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

が母平均 μ を点推定するとき推定量として適切である理由を 3 つ述べて説明せよ.

[10]　母分散 $\sigma^2 = 15$ の正規分布に従うといわれる母集団から, 標本数 25 の無作為標本を抽出し, 標本平均 $\bar{x} = 58.15$ を得た. 母平均を $\mu = 60$ とみなしてよいか? 仮説検定を用いて判定せよ.

数理統計学・期末試験問題 解答用紙 (2019.07.23)

[1] (1) $\frac{2028}{20825}=0.097$	(2) $\frac{5}{9}$	[2] (1) $\frac{1}{3}$	(2) 3
[3] (1) $(a+b)\mu$	(2) $a+2c=0$	[4] (1) 0.695	(2) -2.718
[5] (1) 0.32 ± 0.077	(2) 26896 (27061も可)	[6] (1) 12.75	(2) 0.911
[7] (1) 13.6 ± 1.70	(2) 13.6 ± 2.15		

[8] U_1から取り出した玉が
赤である事象を A_1
白 〃 A_2
黒 〃 A_3
U_2から取り出した玉が
黒である事象を B
とする. 求めるのは $P(A_3|B)$

ベイズの公式によって

$$P(A_3|B)=\frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)}$$

$$=\frac{\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{12}}{\frac{1}{7}\frac{5}{12}+\frac{1}{7}\frac{4}{12}+\frac{2}{7}\frac{3}{12}}$$

$$=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

[9] (i) $E(\overline{X})=\mu$ (不偏性)

(ii) $P(\lim_{n\to\infty}\overline{X}=\mu)=1$ (一致性)

(iii) $\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ 中心極限定理によるμの評価

(iv) 他の平均(加重平均など)より優れていること

その他, $\overline{X}$の統計的優位性を取り上げてそれを説明する
(詳細は本を見よ)

[10] $H_0:\mu=60, H_1:\mu\neq60$
$\alpha=0.05$とする
母集団 $N(\mu,\sigma^2)$から取り出した
n個の標本平均 $\overline{X}$の分布は

$$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$$

[これは一般論] 今の場合,
$\mu=60, \sigma^2=15, n=25$ なので

$$\overline{X}\sim N(60,0.775^2)$$

よって $z=\frac{\overline{X}-60}{0.775}\sim N(0,1)$

H_1の形から両側検定であり
棄却域は $|z|>1.96$ となる
実現値 $z=\frac{58.15-60}{0.775}=-2.387$
は棄却域に落ちる.
有意水準 $\alpha=0.05$の両側検定によって
$H_0:\mu=60$ は棄却される.

学籍番号:　　　　氏名: