

微分積分学演習 I

大学院情報科学研究科

尾畑 伸明

2002–2004 年度に開講した工学部 1 年生向「解析学 A」(主に一変数微積分)で出題した問題(レポート問題・小テスト・期末試験など)に解説を加えたものである. 便宜上, 章にわけてあるが, 問題によっては(一変数)微分積分の広い知識を必要とする.

教科書

[2002 年度] 金子 晃「数理系のための基礎と応用 微分積分 I」サイエンス社

[2003 年度] 岡安隆照ほか「微分積分学入門」裳華房

[2004 年度] 中村哲男ほか「基礎微分積分学 I」共立出版

目次

第 1 章	数列の極限	5
第 2 章	初等関数の取扱い	27
第 3 章	連続関数と微分可能関数	41
第 4 章	微分	49
第 5 章	テーラー展開	75
第 6 章	積分	91

第1章 数列の極限

1.1 $0 < y_1 < x_1$ として,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad \frac{1}{y_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_n} + \frac{1}{y_n} \right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

によって定まる2つの数列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ の極限について調べよ.

解説 まず, 一般に,

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \frac{x+y}{2}, \quad x, y > 0,$$

が成り立つ. 証明は,

$$\frac{x+y}{2} - \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{x+y}{2} - \frac{2xy}{x+y} = \frac{(x+y)^2 - 4xy}{2(x+y)} = \frac{(x-y)^2}{2(x+y)} \geq 0$$

から明らかである. そうすると, 任意の n で

$$y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n \leq x_n \leq \dots \leq x_2 \leq x_1$$

が得られる. 言い替えると, $\{x_n\}$ は下に有界な単調減少列, $\{y_n\}$ は上に有界な単調増加列であり, それぞれ収束する. 極限を α, β とする.

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

において $n \rightarrow \infty$ とすると,

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

が得られ, $\alpha = \beta$ であることがわかる.

次に, この共通の極限值を求めておこう. $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$ に注意すると,

$$x_{n+1} y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \cdot \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} = x_n y_n$$

が得られる. つまり, $x_n y_n$ は定数であって, $x_n y_n = x_1 y_1$ である. 一方, $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は共通の極限值 α をもつから,

$$\alpha^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = x_1 y_1.$$

よって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt{x_1 y_1}.$$

関連問題 $0 < y_1 < x_1$ として,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

によって定まる2つの数列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は同一の極限值をもつ. (極限値の表示は不要)

関連問題 $0 < b < a$ に対して,

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{a_1 b}, \quad \dots \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n},$$

として2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を定める. このとき, その2つの数列は同一の極限值をもち,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{b \sinh t}{t}.$$

ただし, t は $a = b \cosh t$ をみたす正数である.

1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ は既知であるとして次の和を求めよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+2)^2}$$

解説

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+2)^2} = \frac{2n^2 + 4n + 4}{n^2(n+2)^2} = \frac{2}{n(n+2)} + \frac{4}{n^2(n+2)^2} \quad (1.2.1)$$

に注意するとよい. 両辺で $n = 1, 2, \dots$ を走らせて和をとる. 既知としたことから,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}.$$

また,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

よって, (1.2.1) から

$$\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4} = \frac{3}{2} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+2)^2}.$$

となる. これより,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+2)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4} - \frac{3}{2} \right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{11}{16}.$$

1.3 次の級数の収束・発散について調べよ.

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \dots$$

解説 第 n 部分和を S_n とおく.

$$S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}.$$

偶数番までの和は

$$S_{2m} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4m-3} - \frac{1}{4m-1}\right)$$

から, 正の数ばかりを足すことになり単調増加である:

$$S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq \dots$$

一方, 奇数番までの和は,

$$S_{2m+1} = 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) - \dots + \left(\frac{1}{4m-1} - \frac{1}{4m+1}\right)$$

と表せばわかるように単調減少である:

$$S_1 \geq S_3 \geq S_5 \geq \dots$$

さらに, $S_{2m} \leq S_{2m+1}$ が常に成り立つこととから

$$S_2 \leq S_4 \leq \dots \leq S_{2m} \leq \dots \leq S_{2m+1} \leq \dots \leq S_3 \leq S_1.$$

したがって, $\{S_{2m}\}$ は上に有界な単調増加数列, $\{S_{2m+1}\}$ は下に有界な単調減少数列となり, 両方とも収束する (ワイエルシュトラスの定理).

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} \equiv \alpha \leq \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} \equiv \beta.$$

しかし,

$$S_{2m+1} = S_{2m} + \frac{1}{4m+1}$$

が成り立つから $\beta = \alpha$ である. したがって, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は収束する.

(注意) 和は $\pi/4$ である. まず,

$$\arctan x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \dots (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt$$

が示される(証明せよ). $x = 1$ を代入すると,

$$\frac{\pi}{4} - S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt$$

であるから,

$$\left| \frac{\pi}{4} - S_n \right| \leq \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty.$$

1.4 次の命題は正しいか? 正しいときは証明, 誤りのときは, なぜ誤りかを実例(反例という)によって説明せよ.

- (1) 任意の異なる有理数の間には必ず無理数が存在する.
- (2) 数列 $\{a_n\}$ が収束するならば, その数列は有界である.
- (3) 数列 $\{a_n\}$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$ をみたせば, その数列はコーシー列である.
- (4) 2つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に対して $\{a_n + b_n\}, \{a_n b_n\}$ がともに収束すれば, もとの $\{a_n\}, \{b_n\}$ も収束する.

解説 (1) $a < b$ を有理数とする. 例えば, $x = a + (b-a)/\sqrt{2}$ を考えよう. $a < x$ は明らかであり,

$$b - x = b - a - \frac{b-a}{\sqrt{2}} = (b-a) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) > 0$$

から $x < b$ がわかる. さて, x は無理数であることを背理法で示そう. x が有理数であると仮定する.

$$\frac{b-a}{x-a} = \sqrt{2}$$

が導かれるが, 左辺は有理数, 右辺は無理数であるから矛盾である. よって, 任意の2つの有理数 $a < b$ の間には無理数が(1つ以上)存在する.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ とおく. ϵ - δ 論法による収束の定義を思い出すと, 特に $\epsilon = 1$ に対してある番号 N があって,

$$|a_n - \alpha| < 1, \quad n \geq N$$

が成り立つ. このとき, 三角不等式によって,

$$|a_n| = |(a_n - \alpha) + \alpha| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha| \leq 1 + |\alpha|, \quad n \geq N.$$

そこで, $M = \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |\alpha|\}$ とおくと, すべての n に対して $|a_n| \leq M$ となる. つまり, $\{a_n\}$ は有界である.

(3) 誤りである.

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

を考えよう. まず,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1} - a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

は成り立つ. しかし, $\{a_n\}$ は収束しない. 実際,

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \cdots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \end{aligned}$$

から,

$$a_{2^m} \geq 1 + \frac{1}{2} \times m \rightarrow \infty \quad m \rightarrow \infty.$$

コーシー列は収束するので, $\{a_n\}$ はコーシー列ではありえない.

別の反例. $b_n = \sqrt{n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |b_{n+1} - b_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

しかし, $\lim_{n, m \rightarrow \infty} |b_m - b_n| = 0$ はいえない. それが言えたとすれば, $m = 4n$ という関係を保つても極限值は 0 のはず.

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} |b_{4n} - b_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\sqrt{4n} - \sqrt{n}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty.$$

あるいは, 直接的に $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ なので, $\{b_n\}$ はコーシー列ではないとしてもよい.

(4) 反例. $a_n = (-1)^{n-1}$, $b_n = (-1)^n$ を考えよう. これらは収束しないことは明らかであるが, 一方, $a_n + b_n = 0$, $a_n b_n = -1$ はともに定数列なので収束する.

関連問題 (1) 任意の 2 つの無理数の間には有理数が存在することを示せ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ が $|a_{n+1} - a_n| \leq 2^{-n}$ をみたせば, その数列はコーシー列であることを示せ.

関連問題 $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ とおく. 自然数からなる一般の集合 A に対して, 極限值が存在するときに限り,

$$D(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |A \cap I_n|$$

とおく (これを A の密度という). ただし, $|\cdot|$ は集合の元の個数である. 次の問に答えよ.

(1) 自然数 p の倍数の集合 $A = \{p, 2p, 3p, \dots\}$ に対して $D(A)$ を求めよ.

(2) $D(A)$, $D(B)$ が存在しても, $D(A \cap B)$ は存在するとは限らない. 実例を示せ.

1.5 次の命題は正しいか? 正しいときは証明, 誤りのときは, なぜ誤りかを実例(反例という)によって説明せよ.

- (1) 任意の異なる無理数の間には必ず有理数が存在する.
- (2) 無理数からなる数列 $\{a_n\}$ が収束するならば, その極限值も無理数である.
- (3) 数列 $\{a_n\}$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$ をみたせば, その数列はコーシー列である.
- (4) 数列 $\{a_n\}$ が $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2^n}$ をみたせば, その数列はコーシー列である.

解説 (1) (正) $x < y$ を無理数とする. x, y を無限小数で表示して,

$$x = x_0.x_1x_2\ldots, \quad y = y_0.y_1y_2\ldots,$$

とする. 表示は一意的である(問題3). $x < y$ なので, 2つの数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を初めから見比べたとき, 初めて異なるものが現れる番号を k とすれば, $x_k < y_k$ である. そこで,

$$z = x_0.x_1x_2\ldots x_{k-1}y_k = y_0.y_1y_2\ldots y_{k-1}y_k$$

とおく. これは有限小数なので有理数である. また, $x < z < y$ は明らかであろう.

(2) (誤) $a_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$ を考えよ. a_n はすべて無理数であるが, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ は有理数である.

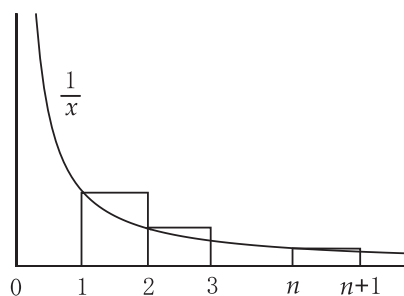
(3) (誤) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ を考えよう.

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

である. しかし, $\{a_n\}$ はコーシー列ではない. 実際, コーシー列ならば収束せねばならないが, $\{a_n\}$ は発散する. このことを示そう. a_n は下図において長方形の面積の和になる. それは $y = 1/x$ の $1 \leq x \leq n+1$ の部分と x 軸によって囲まれた図形を含む(図参照). よって,

$$a_n > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1).$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(n+1) = \infty$ なので, よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.



(4) (正) $n, k \geq 1$ として $|a_{n+k} - a_n|$ を考えよう. 三角不等式から

$$\begin{aligned}
 |a_{n+k} - a_n| &\leq |a_{n+k} - a_{n+k-1}| + |a_{n+k-1} - a_n| \\
 &\leq |a_{n+k} - a_{n+k-1}| + |a_{n+k-1} - a_{n+k-2}| + |a_{n+k-2} - a_n| \\
 &\leq \cdots \\
 &\leq |a_{n+k} - a_{n+k-1}| + |a_{n+k-1} - a_{n+k-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \\
 &\leq \frac{1}{2^{n+k-1}} + \frac{1}{2^{n+k-2}} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\
 &= \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-2}} + \cdots + \frac{1}{2} + 1 \right) < \frac{1}{2^n} \times 2 = \frac{1}{2^{n-1}}.
 \end{aligned}$$

したがって, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\frac{1}{2^{N-1}} < \epsilon$ となる番号 N をとれば, すべての $m, n \geq N$ に対して $|a_m - a_n| < \epsilon$ が成り立つ. つまり, $\{a_n\}$ はコーシー列である.

1.6 閉区間 $I_1 = [0, 1]$ を 3 等分し, その真中にある开区間 $(1/3, 2/3)$ を抜き取ると,

$$I_2 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

ができる. 次に, それぞれの閉区間を 3 等分し, 真中の开区間を抜き取ると,

$$I_3 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

ができる. この操作を続けて $I_1, I_2, I_3, \dots$ が得られる.

- (1) I_n を構成する閉区間の個数を求めよ.
- (2) I_n を構成する閉区間の長さの総和 L_n の $n \rightarrow \infty$ における極限を求めよ.
- (3) すべての I_n に共通に含まれる実数 (つまり, 上の操作を続けても最後まで抜き取られない数) はどのような数あるか? 考察せよ.

解説 (1) 各操作で 1 つの閉区間から 2 つの閉区間が得られるのだから, I_n を構成する閉区間の個数は 2^{n-1} である.

(2) I_n を構成する 1 つの閉区間の長さは, $(1/3)^{n-1}$ であるから,

$$L_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times 2^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

(3) 各 I_n を構成する閉区間の端点は決して抜き取られない. 3 進法で観察するとよい. I_2

に現れる端点は

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{0}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \dots \\ \frac{1}{3} &= \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \dots \\ \frac{2}{3} &= \frac{2}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \dots \\ 1 &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \dots \end{aligned}$$

I_3 に新たに現れる端点は,

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} &= \frac{0}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \dots \\ \frac{2}{9} &= \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \dots \\ \frac{7}{9} &= \frac{2}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \dots \\ \frac{8}{9} &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \dots \end{aligned}$$

このように3進展開したときに 0, 2 のみで表示され, しかもどちらか一方は有限個しか使われないようなものが端点である.

さらに, 3進展開

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \frac{a_4}{3^4} + \dots$$

において a_n が 0 または 2 であるもの (無限個ずつ現れてもよい) も抜き取られずに残る. なぜならば, 各段階で抜き取られる区間 (α, β) は必ず,

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{a_1}{3} + \dots + \frac{a_n}{3^n} \right) + \frac{0}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+2}} + \frac{2}{3^{n+3}} + \dots, \\ \beta &= \left(\frac{a_1}{3} + \dots + \frac{a_n}{3^n} \right) + \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{0}{3^{n+2}} + \frac{0}{3^{n+3}} + \dots, \end{aligned}$$

の形をしている. 上記の x が $\alpha < x < \beta$ を満たすことはありえない.

(注意) すべての I_n に共通に含まれる点の集合

$$X = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$$

をカントール集合と呼ぶ.

関連問題 $\{a_n\}$ を 0, 1, 2 のみからなる数列とする. このとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k}$$

は収束することを (i) ワイエルシュトラスの定理を用いて, (ii) コーシーの判定法を用いて, 示せ.

関連問題 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を $0, 1, 2$ のみからなる数列とすると,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}$$

となるのはどのような場合か?

1.7 a, b を定数とすると, 次の極限值を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} \right)^n$$

解説

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (1.7.1)$$

を e の定義として, この定義だけを元にして (右辺の数列の収束を既知として) 証明する. まず,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n = e^a \quad (1.7.2)$$

に注意する (要証明). さて,

$$\left(1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} \right)^n = \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(1 + \frac{a}{n} \right)^{n-k} \left(\frac{b}{n^2} \right)^k$$

に注意して,

$$\left| \left(1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} \right)^n - \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n \right| \leq \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(1 + \frac{|a|}{n} \right)^{n-k} \left(\frac{|b|}{n^2} \right)^k \equiv M_n \quad (1.7.3)$$

が得られる. $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$ を示すことができれば, (1.7.2) から,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} \right)^n = e^a$$

が得られる. そこで, M_n の評価を考える.

$$M_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} \left(1 + \frac{|a|}{n} \right)^{n-1-k} \left(\frac{|b|}{n^2} \right)^{k+1}$$

において,

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \leq n \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = n \binom{n-1}{k}$$

および

$$\left(1 + \frac{|a|}{n}\right)^{n-1-k} \leq e^{|a|}$$

であることから,

$$\begin{aligned} M_n &\leq \sum_{k=0}^{n-1} n \binom{n-1}{k} e^{|a|} \left(\frac{|b|}{n^2}\right)^{k+1} = n e^{|a|} \frac{|b|}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{|b|}{n^2}\right)^k \\ &= \frac{e^{|a|}|b|}{n} \left(1 + \frac{|b|}{n^2}\right)^{n-1} \leq \frac{e^{|a|}|b|}{n} \left(1 + \frac{|b|}{n-1}\right)^{n-1} \\ &\leq \frac{e^{|a|}|b|}{n} e^{|b|} = \frac{e^{|a|+|b|}|b|}{n}. \end{aligned}$$

これより,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{|a|+|b|}|b|}{n} = 0.$$

関連問題 $a > 0$ のとき,

$$x_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$

は e^a に収束する単調増加数列であることを示せ. したがって, 特に,

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n < e^a$$

であることを確かめよ.

(注意) 上の解は (1.7.1) だけを既知としたものである. (1.7.1) より一般的な公式

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow +0} (1+y)^{\frac{1}{y}} \quad (1.7.4)$$

を用いる解答が散見された.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{an+b}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{an+b}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{an+b}} \right\}^{\frac{an+b}{n}}$$

と変形する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{an+b}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{an+b}}$$

については, $y = \frac{an+b}{n^2}$ とおけば, $n \rightarrow \infty$ のとき, $y \rightarrow +0$ であるから, 公式 (1.7.4) を用いて,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{an+b}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{an+b}} = e.$$

しかし、だからといって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n} + bn^2\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{an+b}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{an+b}} \right\}^{\frac{an+b}{n}} = e^a$$

と結論付けるのは誤りである。事情をはっきりさせるために、

$$f_n(x) = x^{\frac{an+b}{n}}, \quad x_n = \left(1 + \frac{an+b}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{an+b}}$$

とおく。わかっていることは、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x^a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e$$

である。だからといって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = e^a \quad (1.7.5)$$

としてはいけない。以下の関連問題を見よ。

(別解) 上の注意において、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n)$ ではなく、対数をとったものを考えると正しくなる。まず、

$$\log f_n(x_n) = \frac{an+b}{n} \log x_n$$

が得られる。 $\log$ が連続関数であることから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log x_n = \log e = 1.$$

また、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+b}{n} = a$$

は明らかであり、積の極限は極限の積になるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log f_n(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+b}{n} \log x_n = a.$$

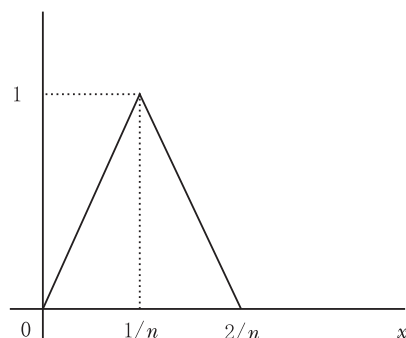
よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = e^a.$$

したがって、(1.7.5) は結果としては正しく、それが成り立つための根拠もある。しかし、その根拠が明示されていないと、次の関連問題によって反論される。

関連問題 関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq 1/n \text{ のとき,} \\ 2 - nx, & 1/n \leq x \leq 2/n \text{ のとき,} \\ 0, & x \geq 2/n \text{ のとき,} \end{cases}$$



と定義する.

数列 $\{x_n\}$ を $x_n = 1/n$ で定義すれば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0,$$

であるが,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = 0$$

は成り立たないことを示せ. [これと比較して, (1.7.5) が成り立つということは何か特別な事情があるはず. そのことを述べなければ解答として本質的な欠陥があり不十分である.]

関連問題 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \alpha$ であるとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^n = e^\alpha$ を証明せよ.

関連問題 (1.7.4) を定義 (1.7.1) を用いて証明せよ.

1.8 半径 1 の円に内接する正 3×2^n 角形の面積を A_n , 円に外接する正 3×2^n 角形の面積を B_n とする. このとき,

$$A_0 < A_1 < A_2 < \cdots < A_n < \cdots < B_n < \cdots < B_2 < B_1 < B_0 \quad (1.8.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (B_n - A_n) = 0 \quad (1.8.2)$$

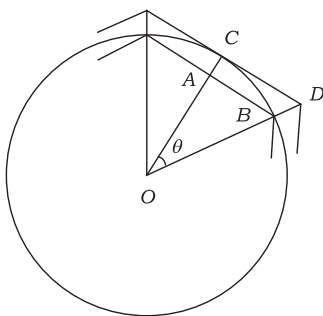
を示せ. 次に, $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ の初めの数項の近似値を (必要なら計算機を用いて) 求めよ.

解説 内接する正 3×2^n 角形は外接する正 3×2^n 角形の内側にあるから $A_n < B_n$ は明らか. また, 内接する正 3×2^n 角形は内接する正 $3 \times 2^{n+1}$ 角形の内側にあるので $A_n < A_{n+1}$. 同様の位置関係から $B_n > B_{n+1}$ も明らかである. よって, (1.8.1) が示された. (1.8.2) については, $B_n - A_n$ が, 内接多角形と外接多角形の間にできる隙間の面積であるから, 直感的に明らかである. しかし, これについては数式で示す必要がある.

まず, A_n, B_n を求めよう. 簡単のため $N = 3 \times 2^n$ と記す. 円に内接, 外接する正 N 角形の一部を図に示す.

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{N}.$$

とおく.



$\triangle OAB$ に注目して

$$OB = 1, \quad OA = \cos \theta, \quad AB = \sin \theta.$$

よって,

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AB = \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta.$$

したがって, 内接する正 N 角形の面積は,

$$A_n = N \times 2\triangle OAB = N \sin \theta \cos \theta = \frac{N}{2} \sin 2\theta = \frac{N}{2} \sin \frac{2\pi}{N}.$$

次に, $\triangle OCD$ に注目して

$$OC = 1, \quad CD = \tan \theta, \quad \triangle OCD = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot CD = \frac{1}{2} \tan \theta$$

となるから, 外接する正 N 角形の面積は,

$$B_n = N \times 2\triangle OCD = N \tan \theta = N \tan \frac{\pi}{N}.$$

こうして,

$$A_n = \frac{N}{2} \sin \frac{2\pi}{N}, \quad B_n = N \tan \frac{\pi}{N}, \quad N = 3 \times 2^n. \quad (1.8.3)$$

$B_n - A_n$ は, 内接多角形と外接多角形の間にできる隙間の面積であり, 台形 $ABDC$ の $2N$ 倍である. 明らかに, (台形 $ABDC$ の面積) $< AC \cdot CD$ であるから,

$$0 < B_n - A_n < AC \times (\text{外接 } N \text{ 角形の周長}).$$

さらに,

$$(\text{外接 } N \text{ 角形の周長}) \leq (\text{外接 } 3 \text{ 角形の周長})$$

は明らかである. よって,

$$0 < B_n - A_n < AC \times (\text{外接 } 3 \text{ 角形の周長}) = (1 - \cos \theta) \times (\text{外接 } 3 \text{ 角形の周長}). \quad (1.8.4)$$

ここで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{3 \times 2^n} = 1$$

なので, (1.8.4) にはさみうちの原理が適用され, (1.8.2) が得られる.

A_n, B_n の手計算のためには,

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{24}, \dots$$

に対する $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ の値が必要である. それは, 半角の公式

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}, \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2},$$

を繰り返し用いればよい. たとえば,

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{12} &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, & \cos \frac{\pi}{12} &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{\pi}{24} &= \sqrt{\frac{4 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{8}}, & \cos \frac{\pi}{24} &= \sqrt{\frac{4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}}{8}} \end{aligned}$$

数値計算の結果を示そう (Excel による).

n	N	A_n	B_n
0	3	1.299038105677	5.196152422707
1	6	2.598076211353	3.464101615138
2	12	3.000000000000	3.215390309173
3	24	3.105828541230	3.159659942098
4	48	3.132628613281	3.146086215131
5	96	3.139350203047	3.142714599645
6	192	3.141031950891	3.141873049980
7	384	3.141452472285	3.141662747057
8	768	3.141557607912	3.141610176605
9	1536	3.141583892148	3.141597034322
10	3072	3.141590463228	3.141593748771
11	6144	3.141592105999	3.141592927385
12	12288	3.141592516692	3.141592722039
13	24576	3.141592619365	3.141592670702
14	49152	3.141592645034	3.141592657868
15	98304	3.141592651451	3.141592654659
16	196608	3.141592653055	3.141592653857
17	393216	3.141592653456	3.141592653657
18	786432	3.141592653556	3.141592653607
19	1572864	3.141592653581	3.141592653594
20	3145728	3.141592653588	3.141592653591

(補注) (1.8.2) を示すのに, (1.8.3) から

$$\begin{aligned} B_n - A_n &= N \tan \frac{\pi}{N} - \frac{N}{2} \sin \frac{2\pi}{N} = N \sin \frac{\pi}{N} \left(\cos \frac{\pi}{N} \right)^{-1} - N \sin \frac{\pi}{N} \cos \frac{\pi}{N} \\ &= N \sin \frac{\pi}{N} \left(\left(\cos \frac{\pi}{N} \right)^{-1} - \cos \frac{\pi}{N} \right) \end{aligned}$$

を求め, 公式

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad (1.8.5)$$

を用いて,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (B_n - A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} N \sin \frac{\pi}{N} \left(\left(\cos \frac{\pi}{N} \right)^{-1} - \cos \frac{\pi}{N} \right) = \pi(1 - 1) = 0$$

としてもよい. 上の解説では, やや高度な公式 (1.8.5) を用いずに証明した.

(補注) アルキメデスは, 正 96 角形 ($96 = 3 \times 2^5$) を用いて円周率の近似値を求めた. 文字式や三角関数のない当時としては驚くべき偉業である. 興味ある者は, A_5 , B_5 を手計算してみよ.

1.9 無限小数 $0.a_1a_2a_3\dots$ は無限級数

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{10^k} \quad (1.9.1)$$

の簡略な書き方である. (ただし, a_k は, $0, 1, \dots, 9$ のいずれか.) すべての無限小数は収束する (言い換えると, a_k がどのように与えられても (1.9.1) が収束する) ことを示せ. 次に,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}$$

となるような $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ にはどのような関係があるか, 調べよ.

解説 $n = 1, 2, \dots$ に対して,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{10^k}$$

とおく. すべての $a_k \geq 0$ であることから,

$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \cdots \leq S_n \leq \cdots$$

がわかる. 一方, a_k は 0 から 9 のいずれかの整数であるから,

$$S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{9}{10^k} = 1 - \frac{1}{10^n} < 1.$$

ここで等比数列の和の公式を用いた。したがって、

$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \cdots \leq S_n \leq \cdots < 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

すなわち, $\{S_n\}$ は上に有界 (1 を超えないから) な単調増加数列であることがわかる。ワイエルシュトラスの定理によって, 極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が存在する。

次に, 異なる 2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が与えられたとして,

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{10^k}, \quad B_n = \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{10^k},$$

とおき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$$

となるかを考察する。2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を初めから見比べてゆけば,

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad \dots, \quad a_{k-1} = b_{k-1}, \quad a_k < b_k,$$

のように初めて食い違う項を見つけることができる。(一般には $a_k \neq b_k$ であるが, $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ について対称なので, $a_k < b_k$ と仮定して一般性を失わない。) このとき,

$$B_k - A_k = \frac{b_k - a_k}{10^k} > 0$$

である。一方, $n > k$ のとき,

$$A_n = A_k + \sum_{j=k+1}^n \frac{a_j}{10^j}, \quad B_n = B_k + \sum_{j=k+1}^n \frac{b_j}{10^j}$$

であるから,

$$B_n - A_n = \sum_{j=k+1}^n \frac{b_j - a_j}{10^j} + (B_k - A_k) = \sum_{j=k+1}^n \frac{b_j - a_j}{10^j} + \frac{b_k - a_k}{10^k}. \quad (1.9.2)$$

よって, $b_j - a_j$ のとりうる範囲を考えれば,

$$\sum_{j=k+1}^n \frac{-9}{10^j} \leq \frac{b_k - a_k}{10^k} - (B_n - A_n) \leq \sum_{j=k+1}^n \frac{9}{10^j}.$$

$n \rightarrow \infty$ とすると,

$$-\frac{1}{10^k} \leq \frac{b_k - a_k}{10^k} \leq \frac{1}{10^k} \quad \text{すなわち} \quad -1 \leq b_k - a_k \leq 1.$$

今, $a_k < b_k$ と仮定しているから, $b_k = a_k + 1$ がわかる。そうすると, (1.9.2) から

$$B_n - A_n = \sum_{j=k+1}^n \frac{b_j - a_j}{10^j} + \frac{1}{10^k}$$

であるが, $n \rightarrow \infty$ として,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=k+1}^n \frac{a_j - b_j}{10^j} = \frac{1}{10^k}$$

が成り立つ. こうなるのは, すべての $j \geq k+1$ に対して $a_j = 9, b_j = 0$ のときだけである (なぜか? 関連問題). こうして, 異なる 2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が同じ数を表すのは,

$$\begin{array}{ccccccc} a_1, & a_2, & \dots, & a_{k-1}, & a_k, & 9, & 9, & 9, & \dots \\ b_1, & b_2, & \dots, & b_{k-1}, & a_k + 1, & 0, & 0, & 0, & \dots \end{array}$$

となるときである. ($a_k = 0, 1, 2, \dots, 8$ である.)

関連問題 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を $0, 1, \dots, 9$ の値をとる 2 つの数列とする. そららが

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{a_j - b_j}{10^j} = 1$$

を満たすならば, すべての n で $a_n = 9, b_n = 0$ であることを示せ. (問題を勘違いしないように. 逆は自明である.)

1.10 $\sqrt{10}$ は無理数であることを示せ. 次に, $\sqrt{10}$ を無限小数で $a_0.a_1a_2a_3\dots$ のように表示できることを示せ. このとき, 表示の仕方は 1 通りしかないことを示せ.

解説 背理法によって, $\sqrt{10}$ は無理数であることを示す. 有理数であれば,

$$\sqrt{10} = \frac{m}{n}, \quad m, n \text{ は整数, } n \neq 0$$

と表される. 両辺を 2 乗して,

$$10n^2 = m^2$$

を得る. 両辺を素因数分解したとき, 因数 2 が何回現れるかを観察しよう. 左辺からは奇数回, 右辺からは偶数回現れる. これは矛盾である. よって, $\sqrt{10}$ は無理数である.

無限小数表示の作り方. まず, a_0 は,

$$a_0 \leq \sqrt{10} < a_0 + 1$$

を満たす整数として定める. $a_0 = 3$ である. 次に, a_1 を

$$\frac{a_1}{10} \leq \sqrt{10} - a_0 < \frac{a_1 + 1}{10}$$

を満たす整数として定める. 以下, 同様に, $a_0, a_1, \dots, a_n$ まで定まったら, a_{n+1} を

$$\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \leq \sqrt{10} - \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \right) < \frac{a_{n+1} + 1}{10^{n+1}}$$

を満たすように定める. こうして得られた $\{a_n\}$ によって,

$$S_n = a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{10^k}$$

とおくと,

$$0 < \sqrt{10} - S_n < \frac{1}{10^n}$$

が成り立つので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sqrt{10}.$$

表示の一意性. 前問から, 表示が2とおきあるのは特別な有理数のときだけである. $\sqrt{10}$ は無理数なので, 表示は一意的である.

1.11 $f(x) = \sqrt{x+4}$ を考える.

(1) $y = f(x)$ のグラフを描け.

(2) 方程式 $x = \sqrt{x+4}$ の解と (1) のグラフとの関係について述べよ.

(3) 数列 a_n を漸化式

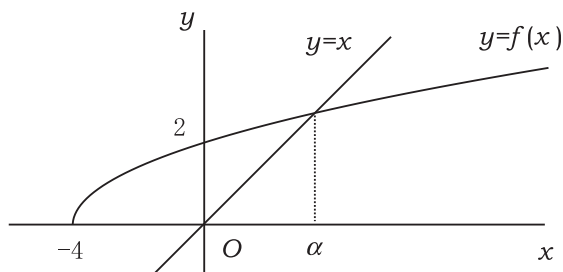
$$a_{n+1} = f(a_n), \quad a_1 = c, \quad (c > -4)$$

で定める. 数列 $\{a_n\}$ の収束・発散について調べよ.

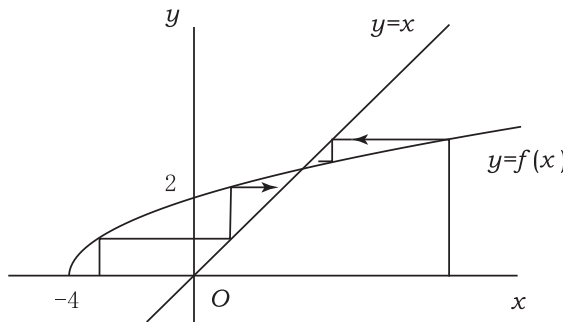
解説 (1) 右図のとおり.

(2) 方程式 $x = \sqrt{x+4}$ の解は,
 $y = f(x) = \sqrt{x+4}$ と $y = x$ の交点の
 x 座標である. それを α とすると,

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}.$$



(3) 数列 $\{a_n\}$ がどのように定義されるかを
 図に表すと, 次のようになる.



図から予想されるように (i) $-4 < c < \alpha$ ならば,

$$c = a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots \rightarrow \alpha.$$

(ii) $\alpha < c$ ならば,

$$c = a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots \rightarrow \alpha.$$

(iii) $c = \alpha$ ならば, すべての n に対して $a_n = \alpha$ なので, もちろん $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$.

(i) を帰納法で証明しよう. $c = a_1 < a_2$ を示す. 実際, $-4 < c < 0$ のときは, $a_2 = \sqrt{c+4} > 0$ となるから, $a_1 < a_2$ である. $0 \leq c < \alpha$ のときを考える.

$$a_2^2 - a_1^2 = f(c)^2 - c^2 = c + 4 - c^2$$

ここで, $x^2 - x - 4 = 0$ の根の 1 つが α , 他方を β とすれば, $\beta < 0 < \alpha$ である. このとき,

$$c + 4 - c^2 = (\alpha - c)(c - \beta)$$

であり, $0 \leq c < \alpha$ からこの値は > 0 . いずれにせよ $a_1 < a_2$.

$n \geq 1$ として, $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$ が示されたとする. さて,

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} + 4} - \sqrt{a_n + 4} = \frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt{a_{n+1} + 4} + \sqrt{a_n + 4}} > 0.$$

よって, 帰納法によって, $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$ が示された.

次に, $a_n < \alpha$ を帰納法で示そう. 実際, $n = 1$ の場合は仮定によってそうである. n まで正しいとして,

$$\alpha - a_{n+1} = \alpha - \sqrt{a_n + 4} = \frac{\alpha^2 - (a_n + 4)}{\alpha + \sqrt{a_n + 4}}.$$

ここで

$$\alpha^2 - (a_n + 4) = (\alpha + 4) - (a_n + 4) = \alpha - a_n > 0.$$

よって, $a_{n+1} < \alpha$.

こうして, $\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列となる. ワイエルシュトラスの定理によって収束する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi$$

とおく. $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 4}$ の両辺で $n \rightarrow \infty$ とすると, $\sqrt{x+4}$ の連続性によって,

$$\xi = \sqrt{\xi + 4}.$$

よって, $\xi = \alpha$ であり, $\{a_n\}$ は α に収束する.

(補足) $\{a_n\}$ が α に収束することを示すために,

$$|a_{n+1} - \alpha| \leq r|a_n - \alpha|, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.11.1)$$

を満たす定数 $0 < r < 1$ を求めるのは良い方針である. r を求めてみよう.

$$a_{n+1} - \alpha = \sqrt{a_n + 4} - \sqrt{\alpha + 4} = \frac{(a_n + 4) - (\alpha + 4)}{\sqrt{a_n + 4} + \sqrt{\alpha + 4}} = \frac{a_n - \alpha}{\sqrt{a_n + 4} + \sqrt{\alpha + 4}}$$

であるから,

$$|a_{n+1} - \alpha| = \frac{|a_n - \alpha|}{\sqrt{a_n + 4} + \sqrt{\alpha + 4}}.$$

したがって, $0 < r < 1$ を

$$\frac{1}{\sqrt{a_n + 4} + \sqrt{\alpha + 4}} < r$$

がすべての n で成り立つようにとれば, (1.11.1) が成り立つ. このような r のとり方は一通りに決まらないが, 例えば, $\sqrt{a_n + 4} \geq 0$ を用いて,

$$\frac{1}{\sqrt{a_n + 4} + \sqrt{\alpha + 4}} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha + 4}} \leq \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

が成り立つことに注意すれば, $r = 1/2$ ととれる. したがって,

$$|a_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |a_n - \alpha|, \quad n = 1, 2, \dots$$

これを繰り返して,

$$|a_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_1 - \alpha| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

1.12 (1) p を素数とする ($p = 2, 3, 5, 7, \dots$) 次の極限值 (等比級数の和) を求めよ.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{1}{p^n}.$$

(2) p, q を異なる素数とするとき, 次の極限值を求めよ.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m,n=0}^N \frac{1}{p^n} \frac{1}{q^m}.$$

(3) 素数が無限個あることを次の議論を補って証明せよ. 素数が有限個しかないと仮定し, $p_1, p_2, \dots, p_s$ とおく. すべての自然数は素因数分解されるので, 任意の n は

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}, \quad k_1, k_2, \dots, k_s = 0, 1, 2, \dots,$$

のように表される. このとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{1.12.1}$$

を素数 $p_1, p_2, \dots, p_s$ で表せ (ヒント (2)). 一方, (1.12.1) は発散することを示せ. この矛盾によって, 素数が無限個あることが示された.

解説 (1) 一般に, 任意の実数 r に対して,

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

したがって, $|r| < 1$ のとき,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r}.$$

これは等比級数の公式として知られている. したがって,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{1}{p^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p - 1}.$$

(2)

$$\sum_{m,n=0}^N \frac{1}{p^n} \frac{1}{q^m} = \sum_{n=0}^N \frac{1}{p^n} \sum_{m=0}^N \frac{1}{q^m}$$

であるから,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m,n=0}^N \frac{1}{p^n} \frac{1}{q^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{q^m} = \frac{p}{p - 1} \cdot \frac{q}{q - 1}.$$

(3) (2) と同様にして,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k_1, \dots, k_s=0}^N \frac{1}{p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}} = \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{k_1}} \cdots \sum_{k_s=0}^{\infty} \frac{1}{p_s^{k_s}} = \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_s}{p_s - 1}. \quad (1.12.2)$$

ところが, 任意の n は素因数分解されて,

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$$

とあらわされるので, 十分大きな N をとれば, $\frac{1}{n}$ は, (1.12.2) の左辺の和に 1 回だけ現れる. 言い換えれば, (1.12.2) の左辺は $\frac{1}{n}$ の総和に等しい. よって,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_s}{p_s - 1}. \quad (1.12.3)$$

一方で, 面積を用いた考察 (問題 5 参照) によって,

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} > \int_1^{N+1} \frac{dx}{x} = \log(N+1) \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow \infty.$$

よって,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

を得る. これは, (1.12.3) に矛盾する.

関連問題 次の公式

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

は既知であるとする. この左辺を素数を用いてあらわすことで,

$$\frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \cdot \frac{7^2}{7^2-1} \cdot \frac{11^2}{11^2-1} \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

を導け. 左辺は

$$\prod_{p:\text{素数}} \frac{p^2}{p^2-1}$$

と表すことが多い.

第2章 初等関数の取扱い

2.1 $n = 1, 2, \dots$ に対して $\cos n\theta$ は $\cos \theta$ の多項式 $T_n(\cos \theta)$ で表される. 例えば, $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ なので,

$$\cos 2\theta = T_2(\cos \theta), \quad T_2(x) = 2x^2 - 1.$$

次の問に答えよ.

- (1) $n = 0, 1, 2, 3, 4$ に対して $T_n(x)$ を求めよ.
- (2) $T_{n+1}(x)$ を $T_n(x)$ と $T_{n-1}(x)$ を用いて表せ.
- (3) $m, n = 0, 1, 2, \dots$ に対して次の積分を計算せよ.

$$\int_{-1}^{+1} T_m(x) T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

解説 (1) 三角関数の公式を組み合わせて計算するだけ. (2) で求めた漸化式を利用してもよい.

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

(2) $n \geq 1$ とする. 三角関数に対する公式から

$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta,$$

$$\sin n\theta \sin \theta = -\frac{1}{2}(\cos(n+1)\theta - \cos(n-1)\theta).$$

よって,

$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos \theta + \frac{1}{2}(\cos(n+1)\theta - \cos(n-1)\theta).$$

移項して,

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos n\theta \cos \theta - \cos(n-1)\theta.$$

ここで $\cos n\theta = T_n(\cos \theta)$ を用いれば,

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

(3) $x = \cos \theta$ とおく. x が $-1 \rightarrow 1$ と変化するとき, θ は $\pi \rightarrow 0$ であることに注意.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_{\pi}^0 \frac{\cos m\theta \cos n\theta}{\sqrt{1-\cos^2 \theta}} (-\sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta) d\theta. \end{aligned}$$

ここで, $m = n = 0$ のとき,

$$\int_{-1}^1 \frac{T_0(x)T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1+1)d\theta = \pi.$$

$m = n \geq 1$ のとき,

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos 2m\theta + 1) d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

$m \neq n$ のとき,

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta) d\theta = 0.$$

(注意) 上では少し泥臭くやったが,

$$2 \cos m\theta \cos n\theta = \cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta$$

を用いると少しスマートになる.

(注意) $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ と上の漸化式から $T_n(x)$ は n 次多項式であることがわかる (帰納法で試みよ). これを第1種チェビシェフ多項式と呼ぶ.

関連問題 $T_n(x) = 0$ は $(-1, +1)$ に n 個の異なる根をもつことを $n = 1, 2, 3, 4$ の場合に確かめよ. (一般の n で成り立つ. なぜだか考えてみよ.)

2.2 $n = 0, 1, 2, \dots$ とする. $\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$ は $\cos \theta$ の n 次多項式で表されることを

証明せよ. 次に, $n = 0, 1, 2, 3, 4$ に対してその多項式 $U_n(x)$ を求めよ.

解説 $n = 0$ のとき,

$$\frac{\sin(0+1)\theta}{\sin \theta} = 1$$

より $U_0(x) = 1$. $n = 1$ のとき,

$$\frac{\sin(1+1)\theta}{\sin \theta} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \cos \theta$$

なので $U_1(x) = 2x$. $n \geq 2$ として, $0 \leq k \leq n-1$ をみたす k に対して $\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin \theta}$ が $\cos \theta$

の k 次多項式 $U_k(\cos \theta)$ で表せたと仮定する. さて, 三角関数の公式

$$\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta = 2 \sin n\theta \cos \theta$$

の両辺を $\sin \theta$ で割ると,

$$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} + \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin \theta} = 2 \cos \theta \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}.$$

帰納法の仮定から,

$$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = 2 \cos \theta U_{n-1}(\cos \theta) - U_{n-2}(\cos \theta).$$

右辺は $\cos \theta$ の n 次多項式になるから, n の場合も主張は正しく,

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$$

が導かれた. この漸化式で計算して,

$$U_2(x) = 4x^2 - 1,$$

$$U_3(x) = 8x^3 - 4x,$$

$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1.$$

(注意) $U_n(x)$ を第 2 種チェビシェフ多項式と呼ぶ.

関連問題 次の等式を証明せよ.

$$\int_{-1}^{+1} U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m = n \text{ のとき}, \\ 0, & \text{その他のとき}. \end{cases}$$

関連問題 チェビシェフ多項式 $T_n(x)$ と $U_n(x)$ に対して次の関係式を証明せよ.

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k T_{n-k}(x).$$

関連問題 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

とおく. ただし, $n = 0$ に対しては, $P_0(x) = 1$. 次の問に答えよ.

- (1) $P_n(x)$ は x の n 次多項式であることを示せ. (ルジャンドル多項式と呼ぶ.)
- (2) $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$ を示せ.
- (3) $xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x)$ を示せ.
- (4) 次の積分公式を示せ.

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x) dx = \frac{2}{(2n+1)} \delta_{mn}$$

2.3 任意の $n = 0, 1, 2, \dots$ と $x \in [-1, 1]$ に対して

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

とおくと, $T_n(x)$ は n 次多項式となることを証明せよ. 次に,

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

を計算せよ. (m, n の場合分けが必要なので注意.)

解説 (1) $n \geq 1$ とする. 三角関数に対する公式から

$$\begin{aligned} \cos(n+1)\theta &= \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta, \\ \sin n\theta \sin \theta &= -\frac{1}{2}(\cos(n+1)\theta - \cos(n-1)\theta). \end{aligned}$$

よって,

$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos \theta + \frac{1}{2}(\cos(n+1)\theta - \cos(n-1)\theta).$$

移項して,

$$\cos(n+1)\theta = 2 \cos n\theta \cos \theta - \cos(n-1)\theta.$$

ここで $\theta = \arccos x$ とおけば,

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

一方, 定義から $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$. したがって, 上の漸化式から $T_n(x)$ が n 次多項式であることわかる (帰納法で試みよ).

(2) $x = \cos \theta$ とおく. x が $-1 \rightarrow 1$ と変化するとき, θ は $\pi \rightarrow 0$ であることに注意.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_{\pi}^0 \frac{\cos m\theta \cos n\theta}{\sqrt{1-\cos^2 \theta}} (-\sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta) d\theta. \end{aligned}$$

ここで, $m = n = 0$ のとき,

$$\int_{-1}^1 \frac{T_0(x)T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1+1)d\theta = \pi.$$

$m = n \geq 1$ のとき,

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos 2m\theta + 1) d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

$m \neq n$ のとき,

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta) d\theta = 0.$$

(注意) $T_n(x)$ は第1種チェビシェフ多項式と呼ばれる. $T_n(x)$ は $\cos n\theta$ を $\cos \theta$ で表す公式になっている.

関連問題 任意の $n = 0, 1, 2, \dots$ と $x \in [-1, 1]$ に対して

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad x = \cos \theta,$$

とおくと, $U_n(x)$ は n 次多項式となることを証明せよ. 次に,

$$\int_{-1}^1 U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2} dx$$

を計算せよ.

(注意) $U_n(x)$ を第2種チェビシェフ多項式と呼ぶ.

2.4 双曲線関数に関する次の公式を証明せよ.

$$(1) A \cosh x \cosh y + B \sinh x \sinh y = \frac{1}{2} \{ (A+B) \cosh(x+y) + (A-B) \cosh(x-y) \}$$

$$(2) \frac{\cosh(x+y+z)}{\cosh x \cosh y \cosh z} = 1 + \tanh y \tanh z + \tanh z \tanh x + \tanh x \tanh y.$$

$$(3) \sum_{k=1}^n \cosh 2kx = \frac{\sinh(2n+1)x}{2 \sinh x} - \frac{1}{2}.$$

解説 (1) 定義から,

$$\begin{aligned}
 (\text{右辺}) &= \frac{1}{2} \left\{ (A+B) \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} + (A-B) \frac{e^{x-y} + e^{-(x-y)}}{2} \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \{ A(e^{x+y} + e^{-(x+y)} + e^{x-y} + e^{-(x-y)}) + B(e^{x+y} + e^{-(x+y)} - e^{x-y} - e^{-(x-y)}) \} \\
 &= \frac{1}{4} \{ A(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + B(e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y}) \} \\
 &= A \cosh x \cosh y + B \sinh x \sinh y.
 \end{aligned}$$

(2) まず,

$$\begin{aligned}
 \cosh(x+y) &= \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \{ e^x(e^y + e^{-y}) - e^{x-y} + e^{-x}(e^y + e^{-y}) - e^{-x+y} \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ (e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) - e^{x-y} - e^{-x+y} \} \\
 &= 2 \cosh x \cosh y - \frac{e^{x-y} + e^{-x+y}}{2}.
 \end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{x-y} + e^{-x+y}}{2} &= \frac{1}{2} \{ -e^x(e^y - e^{-y}) + e^{-x}(e^y - e^{-y}) + e^{x+y} + e^{-x-y} \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ -(e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y}) + e^{x+y} + e^{-x-y} \} \\
 &= -2 \sinh x \sinh y + \cosh(x+y).
 \end{aligned}$$

したがって,

$$\cosh(x+y) = 2 \cosh x \cosh y + 2 \sinh x \sinh y - \cosh(x+y).$$

よって,

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$$

同様にして (各自試みよ),

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.$$

さて, 問題であるが, これらの公式を適用すれば,

$$\begin{aligned}
 \cosh(x+y+z) &= \cosh x \cosh(y+z) + \sinh x \sinh(y+z) \\
 &= \cosh x (\cosh y \cosh z + \sinh y \sinh z) \\
 &\quad + \sinh x (\sinh y \cosh z + \cosh y \sinh z).
 \end{aligned}$$

両辺を $\cosh x \cosh y \cosh z$ で割ればよい.

(3) 左辺は等比数列の和になる.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \cosh 2kx &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (e^{2kx} + e^{-2kx}) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{2x}(e^{2nx} - 1)}{e^{2x} - 1} + \frac{e^{-2x}(e^{-2nx} - 1)}{e^{-2x} - 1} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^x(e^{2nx} - 1)}{e^x - e^{-x}} + \frac{e^{-x}(e^{-2nx} - 1)}{e^{-x} - e^x} \right\} \\
 &= \frac{1}{2(e^x - e^{-x})} \{ e^x(e^{2nx} - 1) - e^{-x}(e^{-2nx} - 1) \} \\
 &= \frac{1}{4 \sinh x} \{ e^{(2n+1)x} - e^{-(2n+1)x} - (e^x - e^{-x}) \} \\
 &= \frac{2 \sinh(2n+1)x - 2 \sinh x}{4 \sinh x} \\
 &= \frac{\sinh(2n+1)x}{2 \sinh x} - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

関連問題

$$\begin{aligned}
 \sinh x + \sinh y &= 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2} & \sinh x - \sinh y &= 2 \cosh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2} \\
 \cosh x + \cosh y &= 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2} & \cosh x - \cosh y &= 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}
 \end{aligned}$$

関連問題

$$\frac{\sinh(x+y+z)}{\sinh x \sinh y \sinh z} = 1 + \coth y \coth z + \coth z \coth x + \coth x \coth y$$

2.5 逆三角関数 (主値とする) に関する次の公式を証明せよ.

$$(1) \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$(2) \arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x \geq 0)$$

解説 (1) $\theta = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ とおくと, 逆三角関数の定義から,

$$\sin \theta = \frac{2x}{1+x^2}.$$

よって,

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^2 = \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^2. \quad (2.5.1)$$

さて, $0 \leq x \leq 1$ の仮定から, $\sin \theta \geq 0$. よって, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (主値をとっている). そのとき, $\cos \theta \geq 0$. したがって, (2.5.1) から

$$\cos \theta = \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad \text{すなわち} \quad \theta = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

(2) $\theta = \arctan x$ とおくと, $x \geq 0$ と合わせて,

$$x = \tan \theta, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}.$$

そこで,

$$1+x^2 = 1+\tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

で, $\cos \theta \geq 0$ であるから,

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

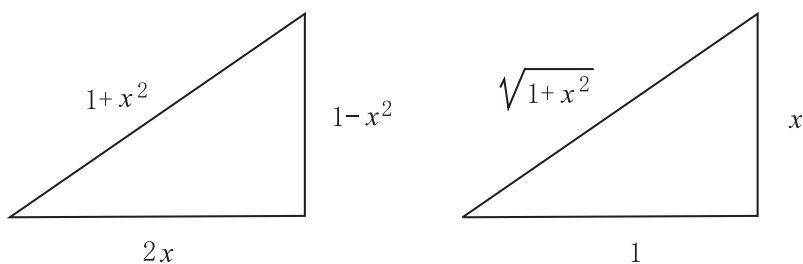
$\sin \theta \geq 0$, $x \geq 0$ に注意して,

$$\sin \theta = \sqrt{1-\cos^2 \theta} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

以上より,

$$\theta = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(別解) 直角三角形から図形的に証明することも可能であり分かりやすい.



2.6 $\alpha = \arctan \frac{1}{5}$ とおく. $\tan 4\alpha = 1 + \frac{1}{119}$ を示せ. これを用いて次式を導け.

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

解説 $\tan \alpha = 1/5$ であるから

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{5}{12}.$$

さらに,

$$\tan 4\alpha = \frac{2 \tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} = \frac{5}{6} \bigg/ \frac{119}{12^2} = \frac{120}{119} = 1 + \frac{1}{119}.$$

次に,

$$\tan \left(4\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan 4\alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan 4\alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{119} \bigg/ \frac{239}{119} = \frac{1}{239}.$$

よって,

$$\arctan \frac{1}{239} = 4\alpha - \frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \frac{\pi}{4}.$$

よって示された.

(注意) 教科書 p.98 問題 12 も参照のこと.

関連問題 次式を示せ.

$$\frac{\pi}{4} = 5 \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{3}{79} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$$

関連問題 $\arctan x + \arctan y + \arctan z = 0$ ならば $x + y + z = xyz$.

2.7 (1) 多価性や主値についての説明も含めて, 逆三角関数 $\arctan x$ の定義を述べよ.

(2) $\arctan \frac{1}{p} + \arctan \frac{1}{q} = \frac{\pi}{4}$ をみたす正整数の組 (p, q) をすべて求めよ.

解説 (1) 教科書を参照.

(2) 簡単のため, $\alpha = \arctan \frac{1}{p}$, $\beta = \arctan \frac{1}{q}$ とおくと, 仮定から $\alpha + \beta = \pi/4$. よって,

$$1 = \tan \frac{\pi}{4} = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

ここで, $\tan \alpha = 1/p$, $\tan \beta = 1/q$ を用いると,

$$1 = \frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}{1 - \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q}} = \frac{q + p}{pq - 1}.$$

よって, $q + p = pq - 1$. つまり,

$$(p - 1)(q - 1) = 2$$

となる. これをみたす正整数の組は $(p, q) = (2, 3), (3, 2)$.

2.8 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ に対して

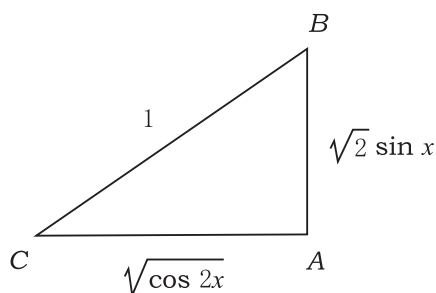
$$\arcsin(\sqrt{2} \sin x) + \arcsin(\sqrt{\cos 2x}) = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つことを示せ.

解説 まず,

$$(\sqrt{2} \sin x)^2 + (\sqrt{\cos 2x})^2 = 2 \sin^2 x + \cos 2x = (1 - \cos 2x) + \cos 2x = 1$$

に注意する. これは $AB = \sqrt{2} \sin x$, $AC = \sqrt{\cos 2x}$, $BC = 1$ となる直角三角形がかけるところを示している.



そうすれば,

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \sqrt{2} \sin x, \quad \sin B = \frac{AC}{BC} = \sqrt{\cos 2x}.$$

よって,

$$\arcsin(\sqrt{2} \sin x) + \arcsin(\sqrt{\cos 2x}) = \angle C + \angle B = \frac{\pi}{2}.$$

これは, $0 < x < \pi/4$ で通用する議論であるが, $x = 0, \pi/4$ のときは, 直接代入すれば成立を確かめることは容易.

解析的に示すことも可能. 左辺を $f(x)$ とおき, x で微分してみよう.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{2} \cos x}{1 - 2 \sin^2 x} + \frac{\frac{1}{2} \frac{-2 \sin 2x}{\cos 2x}}{\sqrt{1 - \cos 2x}} \\ &= \frac{\sqrt{2} \cos x}{\cos 2x} + \frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x} \sqrt{1 - \cos 2x}} \\ &= \frac{\sqrt{2} \cos x}{\cos 2x} + \frac{-2 \sin x \cos x}{\sqrt{\cos 2x} \sqrt{2} \sin x} = 0. \end{aligned}$$

これが开区間 $(0, \pi/4)$ で成り立つ. よって, 同区間上で $f(x)$ は定数である. さらに, $f(x)$ は閉区間 $[0, \pi/4]$ 上で連続であるから,

$$f(x) = f(0) = \arcsin 0 + \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

2.9 等式

$$\sinh x + \sinh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$$

を証明せよ. 次に,

$$\sinh x - \sinh y, \quad \cosh x + \cosh y, \quad \cosh x - \cosh y$$

に関する類似の公式を導け.

解説 定義にもとづいて計算するのみ.

$$\begin{aligned} 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2} &= 2 \frac{e^{(x+y)/2} - e^{-(x+y)/2}}{2} \frac{e^{(x-y)/2} + e^{-(x-y)/2}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ e^{(x+y)/2} e^{(x-y)/2} + e^{(x+y)/2} e^{-(x-y)/2} \right. \\ &\quad \left. - e^{-(x+y)/2} e^{(x-y)/2} - e^{-(x+y)/2} e^{-(x-y)/2} \right\} \\ &= \frac{e^x + e^y - e^{-y} - e^{-x}}{2} \\ &= \sinh x + \sinh y. \end{aligned}$$

類似の公式も同様に証明される.

$$\begin{aligned} \sinh x - \sinh y &= 2 \cosh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2} \\ \cosh x + \cosh y &= 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2} \\ \cosh x - \cosh y &= 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

関連問題 次の等式を証明せよ.

$$\begin{aligned} \cosh 2x &= 2 \cosh^2 x - 1, & \cosh 3x &= 4 \cosh^3 x - 3 \cosh x, \\ \sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x, & \sinh 3x &= 4 \sinh^3 x + 3 \sinh x, \\ \tanh 2x &= \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}, & \tanh 3x &= \frac{3 \tanh x + \tanh^3 x}{1 + 3 \tanh^2 x}. \end{aligned}$$

2.10 $-1 < x < 1$ とするとき,

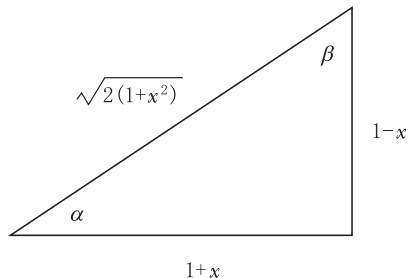
$$\arcsin \frac{1-x}{\sqrt{2(1+x^2)}} + \arcsin \frac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}}$$

は x によらない定数であることを示し, その定数を求めよ.

解説 $-1 < x < 1$ なので, $1-x$, $1+x$, $\sqrt{2(1+x^2)}$ はみな正の数である. さらに,

$$(1-x)^2 + (1+x)^2 = 2(1+x^2)$$

なので, 図のような直角3角形の3辺になっている.



明らかに,

$$\sin \alpha = \frac{1-x}{\sqrt{2(1+x^2)}}, \quad \sin \beta = \frac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}}$$

であるが, 逆三角関数の定義から,

$$\alpha = \arcsin \frac{1-x}{\sqrt{2(1+x^2)}}, \quad \beta = \arcsin \frac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}}$$

である. よって,

$$\arcsin \frac{1-x}{\sqrt{2(1+x^2)}} + \arcsin \frac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}} = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

(別解)

$$f(x) = \arcsin \frac{1-x}{\sqrt{2(1+x^2)}} + \arcsin \frac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}}$$

とおき, 微分すると, $f'(x) = 0$ が示される. したがって, $f(x)$ は区間 $(-1, 1)$ で定数である. その定数は, 例えば $x = 0$ を代入して求められる.

2.11 次式を示せ.

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$$

解説 $\tan$ の加法公式を繰り返し用いれば,

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta + \gamma) &= \frac{\tan \alpha + \tan(\beta + \gamma)}{1 - \tan \alpha \tan(\beta + \gamma)} \\ &= \frac{\tan \alpha + \frac{\tan \beta + \tan \gamma}{1 - \tan \beta \tan \gamma}}{1 - \tan \alpha \frac{\tan \beta + \tan \gamma}{1 - \tan \beta \tan \gamma}} \\ &= \frac{\tan \alpha(1 - \tan \beta \tan \gamma) + \tan \beta + \tan \gamma}{1 - \tan \beta \tan \gamma - \tan \alpha(\tan \beta + \tan \gamma)} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma - \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma}{1 - (\tan \beta \tan \gamma + \tan \gamma \tan \alpha + \tan \alpha \tan \beta)}\end{aligned}$$

今,

$$\alpha = \arctan \frac{1}{2}, \quad \beta = \arctan \frac{1}{5}, \quad \gamma = \arctan \frac{1}{8},$$

とにおいて上の加法公式を用いれば,

$$\tan(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \frac{1}{5} \frac{1}{8}}{1 - (\frac{1}{5} \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{5})} = 1.$$

よって, $\alpha + \beta + \gamma = \pi/4$.

関連問題 次の式を満たす正整数の組 (p, q) をすべて求めよ.

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{p} + \arctan \frac{1}{q} = \frac{\pi}{4}.$$

また,

$$\arctan \frac{1}{p} + \arctan \frac{1}{q} + \arctan \frac{1}{r} = \frac{\pi}{4}$$

を満たす正整数の組 (p, q, r) はどのようなものか.

(ヒント) $1 \leq p \leq q \leq r$ と仮定してよい. $1 \geq \frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} \geq \frac{1}{r} > 0$ であるから

$$3 \arctan \frac{1}{p} \geq \arctan \frac{1}{p} + \arctan \frac{1}{q} + \arctan \frac{1}{r} = \frac{\pi}{4}$$

よって,

$$\frac{1}{p} \geq \tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} \approx 0.2679.$$

これから $p \leq 3$ がわかるので, $p = 1, 2, 3$ について場合わけして調べればよい. [答: $(2, 4, 13)$, $(2, 5, 8)$, $(3, 3, 7)$]

第3章 連続関数と微分可能関数

3.1 $[0, 2]$ を定義域とする連続関数 $f(x)$ の値域が $[0, 2]$ を含むとき, $x = f(x)$ をみたす x が存在することを証明せよ. ただし, $f(x)$ の値域とは $\{f(x); 0 \leq x \leq 2\}$ のことである.

解説 (1) $f(x)$ の値域が $[0, 2]$ を含むので, 特に, $f(\alpha) = 0, f(\beta) = 2$ となる α, β が $f(x)$ の定義域, つまり $[0, 2]$ に存在する. まず, $\alpha < \beta$ の場合を考えよう. $y = f(x)$ と $y = x$ のグラフには必ず交点が存在することは, 位置関係の図からは明らかであるが, 多様な可能性からひとつの $f(x)$ を示しているだけなので, どこがポイントかをしっかり述べなければならない. はっきり区別するために $g(x) = x$ とおこう.

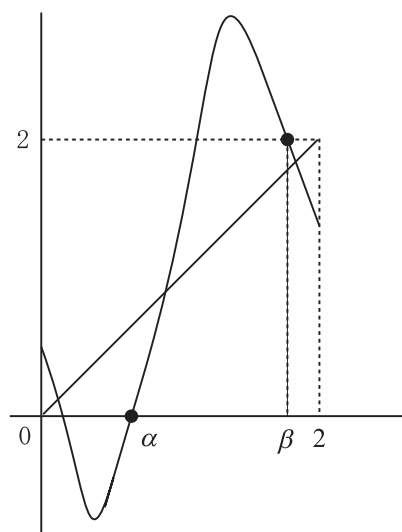
$$f(\alpha) = 0, \quad g(\alpha) > 0; \quad f(\beta) = 2, \quad g(\beta) < 2;$$

に注目するとよい. したがって,

$$F(x) = f(x) - g(x)$$

を考えると, $F(\alpha) < 0, F(\beta) > 0$. 中間値の定理から $F(c) = 0$ を満たす c が $\alpha < c < \beta$ に存在する. この c が求めるべき x である.

$\alpha > \beta$ の場合も同様に考えることができる (試みよ).



3.2 次の関数は $\mathbf{R}$ 上で何回連続的に微分可能か?

$$f(x) = \begin{cases} x^n & x \geq 0 \\ -x^n & x < 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

解説 (1) $x \neq 0$ では C^∞ -級 (任意回数微分可能) であることは明らか. $n-1$ 回微分すると,

$$f^{(n-1)}(x) = n!x, \quad x \geq 0; \quad = -n!x, \quad x < 0$$

となる. 一言でまとめれば,

$$f^{(n-1)}(x) = n!|x|.$$

$|x|$ は $\mathbf{R}$ 上の連続関数であるが, $x = 0$ では微分できないことは既知. よって, $f^{(n-1)}(x)$ は $x = 0$ で連続であるが微分不可能. つまり, $f(x)$ は C^{n-1} -級であり, C^n -級ではない.

(2) これも $x \neq 0$ では C^∞ -級 (任意回数微分可能) であることは明らか. $x = 0$ における連続性や微分可能性のみが問題. まず, $|\sin \theta| \leq 1$ であるから,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

よって, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$ であり, $g(x)$ は連続関数である. $x = 0$ における微分係数を求めよう.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

となる. この極限は存在しない. 例えば, $x \rightarrow 0$ にあたって, 特殊な近づき方を考えてみよう. $x = \frac{1}{2\pi n}$, $n = 1, 2, \dots$, をとると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin 2\pi n = 0.$$

$x = \frac{1}{2\pi n + \pi/2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, をとると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(2\pi n + \frac{\pi}{2} \right) = 1$$

$x \rightarrow 0$ となる数列の取り方によって, 異なる極限值が得られるので, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ は存在しないのである. したがって, $g(x)$ は $x = 0$ で微分不可能. つまり, $g(x)$ は C^0 -級であり, C^1 -級ではあり得ない.

(3) これも $x \neq 0$ では C^∞ -級 (任意回数微分可能) であることは明らか. $x = 0$ における連続性や微分可能性のみが問題. $x < 0$ では $h^{(n)}(x) = 0$ は明らかである. $x > 0$ において,

$$h(x) = e^{-\frac{1}{x}}, \quad h'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}, \quad h''(x) = \left(-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right) e^{-\frac{1}{x}}, \dots$$

のように計算される. 一般に,

$$h^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$$

の形になることを数学的帰納法で証明しよう. ただし, $p_n(x)$ は多項式である. 実際, $n = 1$ のときはすでに示した. $n \geq 1$ として n まで正しいとすれば, もう一回微分して

$$h^{(n+1)}(x) = \left(-\frac{2np_n(x)}{x^{2n+1}} + \frac{p'_n(x)}{x^{2n}} + \frac{p_n(x)}{x^{2n}} \frac{1}{x^2} \right) e^{-\frac{1}{x}} = \frac{-2nxp_n(x) + x^2p'_n(x) + p_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}}.$$

$p_{n+1}(x) = -2nxp_n(x) + x^2p'_n(x) + p_n(x)$ は多項式であるから, $n+1$ に対する主張も正しい. そうすると,

$$\lim_{x \rightarrow +0} h^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{p_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} p_n\left(\frac{1}{y}\right) y^{2n} e^{-y} = 0.$$

これは, $\lim_{x \rightarrow -0} h^{(n)}(x) = 0$ と一致するから, $h(x)$ は何回でも連続的微分可能となる. つまり, $h(x)$ は C^∞ -級である.

関連問題 次の関数は $\mathbf{R}$ 上で何回連続的微分可能か?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^n \log x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ (-x)^n \log x & x < 0 \end{cases}$$

3.3 次の関数 $f(x)$ に対して $f'(x)$ と $f''(x)$ の連続性について述べよ.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \text{ のとき} \\ 0 & x = 0 \text{ のとき.} \end{cases}$$

解説 $x = 0$ 以外では無限回連続的微分可能であることは明らかである. $x = 0$ で微分可能であること:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

であるが, $|\sin \theta| \leq 1$ であることから,

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \leq x^2 \rightarrow 0 \quad x \rightarrow 0.$$

よって, $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能で $f'(0) = 0$. $x \neq 0$ では,

$$f'(x) = 3x^2 \sin \frac{1}{x} + x^3 \cos \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}.$$

上と同様な議論で $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$ がわかるから, $f'(x)$ は $x = 0$ も含めて $\mathbf{R}$ 上で連続関数である.

次に, $x \neq 0$ で

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6x \sin \frac{1}{x} + 3x^2 \cos \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x^2} \right) - \cos \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= 6x \sin \frac{1}{x} - 3 \cos \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \\ &= 6x \sin \frac{1}{x} - 4 \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

$x \rightarrow 0$ において, 初めの2項は有界に留まるが, 第3項の絶対値は発散する. 例えば, $x = (\pi/2 + 2n\pi)^{-1}$ として $n \rightarrow \infty$ を考えると,

$$\left| \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \right| = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty.$$

こうして $f(x)$ は1回連続的微分可能であるが, 2回連続的微分可能ではない. 実際, $f''(0)$ さえ存在しない.

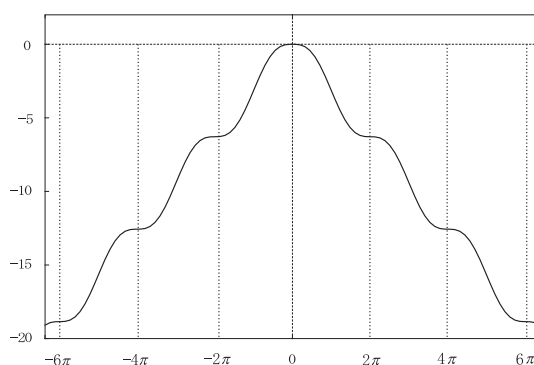
$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = 3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

であるが, 第2項が $[-1, 1]$ で振動を続けるため, $x \rightarrow 0$ における極限は存在しない.

3.4 関数 $f(x) = \sin |x| - |x|$ について次の問に答えよ.

- (1) $y = f(x)$ のグラフの概形を美しく描け.
- (2) $f(x)$ は $x = 0$ で微分できるかどうかを調べよ.
- (3) $y = f'(x)$ のグラフの概形を (導関数が定義できる範囲で) 美しく描け.

解説 (1) $x = 0$ においても滑らかにつながっている (問題 (2) も参照).



(2) $x \neq 0$ で微分できることは明らかである. 実際, $x > 0$ であれば $f(x) = \sin x - x$ であるから,

$$f'(x) = \cos x - 1, \quad x > 0.$$

また, $x < 0$ であれば $f(x) = -\sin x + x$ であるから,

$$f'(x) = -\cos x + 1, \quad x < 0.$$

では, $x = 0$ で微分できるかどうかを, 左右微分係数を求めることで調べてゆこう.

$$D_+f(0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\sin h - h}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\sin h}{h} - 1 = 0.$$

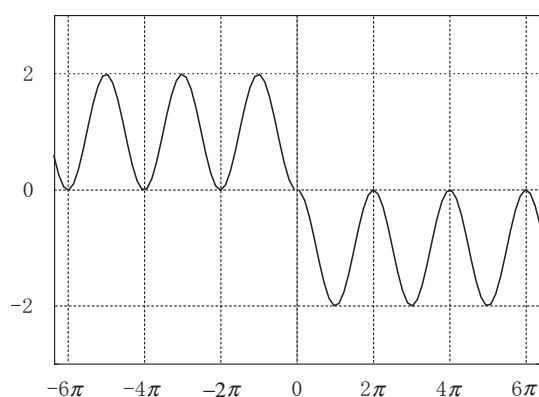
同様に,

$$D_-f(0) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-\sin h + h}{h} = -\lim_{h \rightarrow -0} \frac{\sin h}{h} + 1 = 0.$$

したがって, $D_+f(0) = D_-f(0) = 0$. よって $f'(0) = 0$. こうして, $f(x)$ はすべての x で微分可能であり,

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x - 1, & x \geq 0 \text{ のとき,} \\ -\cos x + 1, & x \leq 0 \text{ のとき.} \end{cases}$$

(3) すでに見たように, $f'(x)$ は $x = 0$ でも連続である (ほかの点での連続性は明らか).



3.5 関数 $f(x) = x \log x$ について次の問に答えよ.

- (1) $x > 0$ の範囲で $y = f(x)$ のグラフを美しく描け.
- (2) $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x$ を求め, $f(x)$ が $x \geq 0$ の範囲で連続関数になるように $f(0)$ の値を定めよ.
- (3) n 個の実数 $a_1, \dots, a_n$ が $a_k \geq 0$ かつ $\sum_{k=1}^n a_k = 1$ をみたすとき次の不等式が成り立つことを示せ:

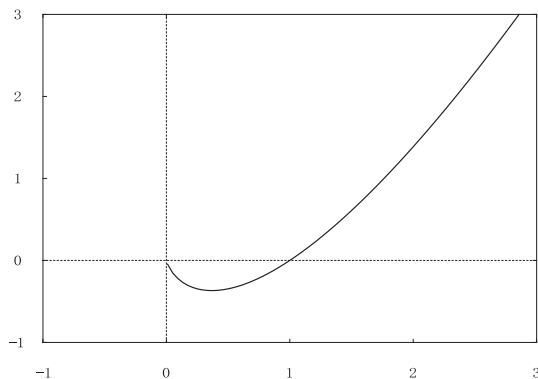
$$-\sum_{k=1}^n f(a_k) \leq \log n$$

- (4) (3) で等号が成り立つような $a_1, \dots, a_n$ はどのようなものか?

解説 (1) 高校級微分の問題.

$$f'(x) = \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1.$$

よって, $f'(e^{-1}) = 0$ であり, $x = e^{-1}$ の前後で $f'(x)$ の符号が変化するのみ.



(2) まず,

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \log \frac{1}{y} = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log y}{y}.$$

$y = e^t$ とおきなおせば,

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log y}{y} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$$

(最後の等式は既知とした.) よって,

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0.$$

$f(x)$ において $x = 0$ の値は定まっていないが, $f(0) = 0$ と定義してやれば, $f(x)$ は $[0, +\infty)$ で連続になる.

(3) n 個の実数 $a_1, \dots, a_n$ の中に 0 が含まれていれば, そのような a_k に対して $f(a_k) = 0$ であるから, 証明すべき不等式の左辺には寄与しない. また, そのような a_k を除外した総和は 1 のままである. よって, 初めからすべての $a_k > 0$ と仮定して証明すればよい.

まず, $f(x)$ は $(0, 1)$ 上の凸関数であることに注意する. つまり,

$$f(p_1 x_1 + p_2 x_2) \leq p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2), \quad x_1, x_2 \in (0, 1), \quad p_1, p_2 \geq 0, \quad p_1 + p_2 = 1.$$

これはグラフの形状から, または計算によってわかる. そうすると帰納法によって, $p_1, \dots, p_n \geq 0, p_1 + \dots + p_n = 1$ をみたす任意の $p_1, \dots, p_n$ に対して,

$$f(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n) \leq p_1 f(x_1) + \dots + p_n f(x_n), \quad x_1, \dots, x_n \in (0, 1),$$

が示される (教科書 p.70). 特に, $p_1 = \dots = p_n = 1/n$ とおけば,

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} (f(x_1) + \dots + f(x_n)). \quad (3.5.1)$$

よって,

$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \log \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}(f(x_1) + \cdots + f(x_n)).$$

$x_k = a_k$ ととれば, 仮定 $\sum a_k = 1$ に注意して,

$$\left(\frac{1}{n}\right) \log \left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}(f(a_1) + \cdots + f(a_n)).$$

よって,

$$-(f(a_1) + \cdots + f(a_n)) \leq \log n.$$

これが証明すべき式である.

(4) $f(x)$ が狭義凸関数であることから, (3.5.1) で等号が成り立つのは, $x_1 = \cdots = x_n$ のときのみである. よって, (3) においては $a_1 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$ のときのみ等号が成立する.

(別解) まず,

$$x \log x \geq x - 1, \quad x \geq 0, \quad (3.5.2)$$

を示す. ($x = 0$ では, (2) のように $0 \log 0 = 0$ とする.) $g(x) = x \log x - x + 1$ とおいて, 微分すると,

$$g'(x) = \log x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \log x.$$

よって, $x = 1$ が唯一 $g'(x) = 0$ を満たす点であり, $x = 1$ の前後で $g'(x)$ の符号が入れ替わる. したがって $g(1) = 0$ は極小値であり, かつ最小値である. つまり, (3.5.2) が成り立つ.

次に, n 個の実数 $a_1, \dots, a_n$ が $a_k \geq 0$ かつ $\sum_{k=1}^n a_k = 1$ をみたすように与えられているとする. $x = na_k$ を (3.5.2) に代入して,

$$na_k \log(na_k) \geq na_k - 1 \quad (3.5.3)$$

$$\iff na_k \log n + na_k \log a_k \geq na_k - 1 \iff a_k \log n + a_k \log a_k \geq a_k - \frac{1}{n}.$$

$\sum_{k=1}^n a_k = 1$ に注意して, k について和をとって,

$$\log n + \sum_{k=1}^n a_k \log a_k \geq 1 - 1 = 0.$$

よって,

$$-\sum_{k=1}^n a_k \log a_k \leq \log n. \quad (3.5.4)$$

ここで等号が成り立つのは, (3.5.3) において, すべての k について等号が成り立つときに限る. そのような na_k は (3.5.2) において等号を成立させる x であるから, $na_k = 1$ でなければならない. つまり, (3.5.4) で等号が成り立つのは $a_k = 1/n$, $k = 1, 2, \dots, n$, のときに限る.

3.6 (1) 平均値の定理を述べよ. 特に, 仮定・結論をはっきりと.

(2) $f(x)$ を有限開区間 (a, b) 上で定義された2回微分可能な関数とする. もし, すべての $x \in (a, b)$ に対して $f''(x) = 0$ が満たされれば $f(x)$ は1次関数であることを平均値の定理を用いて証明せよ.

解説 (1) 略.

(2) (a, b) から任意に2点 $x < y$ を選ぶ. f' は $[x, y]$ 上連続, (x, y) 上微分可能であるから, 平均値の定理によって,

$$f'(y) - f'(x) = f''(z)(y - x)$$

をみたす z が (x, y) 内にとれる. 仮定によって, $f''(z) = 0$ であるから,

$$f'(y) - f'(x) = 0.$$

よって, $f'(x)$ は (a, b) 上で定数である. その定数を A とおこう:

$$f'(x) = A, \quad a < x < b.$$

次に, $f(x)$ に対して平均値定理を当てはめると,

$$f(y) - f(x) = f'(z)(y - x)$$

をみたす z が (x, y) 内にとれるが, $f'(z) = A$ であつたから,

$$f(y) - f(x) = A(y - x).$$

よって,

$$f(x) = Ax + (f(y) - Ay).$$

これは, 任意の $x, y \in (a, b)$ で成り立つので, y を固定して, x を変数と見ても良い. $B = f(y) - Ay$ は定数となり,

$$f(x) = Ax + B$$

が得られる.

第4章 微分

4.1 次の関数の導関数を求めよ.

$$(1) y = \sinh x \cosh x \quad (2) y = x^{\frac{1}{x}} \quad (3) y = \log(\cos^2 x) \quad (4) y = \frac{\arcsin x}{x}$$

解説 (1) $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$ はすぐわかる. よって,

$$y' = (\sinh x)' \cosh x + \sinh x (\cosh x)' = \cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x.$$

(無論, 初めから指数関数で計算してもよい.)

(2) $y = e^{\frac{\log x}{x}}$ より

$$y' = \left(\frac{\log x}{x} \right)' e^{\frac{\log x}{x}} = \frac{1 - \log x}{x^2} x^{\frac{1}{x}} = (1 - \log x) x^{\frac{1}{x} - 2}.$$

(3)

$$y' = \frac{(\cos^2 x)'}{\cos^2 x} = \frac{2 \cos x (-\sin x)}{\cos^2 x} = -\frac{2 \sin x}{\cos x} = -2 \tan x.$$

(4) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を用いればよい. この公式は逆三角関数の定義に戻っても容易にわかる.

$$y' = \frac{(\arcsin x)' x - \arcsin x}{x^2} = \frac{x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x}{x^2 \sqrt{1-x^2}}.$$

4.2 次の極限を求めよ.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n!} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{(\log n)^{100}} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \cos 2x}{x}$$

解説 (1) 分母分子を n^3 で割る常套手段による.

$$\begin{aligned} \frac{n^3}{n!} &= \frac{1}{\frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} (n-3)(n-4) \dots 2 \cdot 1} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) (n-3)(n-4) \dots 2 \cdot 1} \longrightarrow 0 \quad n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

(2) $\log n = x$ とおくと $n = e^x$. n と x は同時に ∞ になるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{(\log n)^{100}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x/2}}{x^{100}} = 0.$$

最後のところは, e^x はすべての多項式よりも速く増加するという事実による. 証明は, ロピタルの定理で分母分子を微分してゆくと, 分子にはいつも $e^{x/2}$ が残るが, 分母は次数が1ずつ落ちてゆき最後には定数になることからわかる.

(3) まず,

$$\frac{|x| \cos 2x}{x} = \begin{cases} \cos 2x & x > 0 \text{ のとき} \\ -\cos 2x & x < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

に注意しよう. そうすれば,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x| \cos 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \cos 2x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x| \cos 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} (-\cos 2x) = -1,$$

となるから, 極限值は存在しない.

4.3 次の主張は正しいか? 正しいときは証明し, 誤りのときは実例によって(反例という)説明せよ.

- (1) 有限開区間 (a, b) で微分可能な関数 $f(x)$ に対して $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ が存在する.
- (2) $f(x)$ を区間 (a, b) で定義された関数とする. $f(x)^2$ が微分可能ならば $f(x)$ 自身も微分可能である.
- (3) 2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ があって, $f(x)$ が微分可能, $f(g(x))$ が微分可能であれば, $g(x)$ も微分可能である.
- (4) $f(x)$, $g(x)$ を開区間 (a, b) で定義された関数で, $f'(x) = g'(x)$ がすべての $x \in (a, b)$ で成り立っているとする. このとき, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x)$ が成り立てば, $f(x)$ と $g(x)$ は一致する.

解説 (1) 誤.

$$f(x) = \frac{1}{(b-x)(x-a)}, \quad a < x < b,$$

を考えると, (a, b) 上で微分可能であることは明らかである. しかし,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty.$$

(2) 誤. $(-1, 1)$ 上で定義された関数 $f(x) = |x|$ を考えよう. $f(x)^2 = |x|^2 = x^2$ は微分可能であるが, $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で微分できない.

(3) 誤. $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$ を考えよう. $f(x)$ は微分可能であり, $f(g(x)) = g(x)^2 = |x|^2 = x^2$ も微分可能である. しかし, $g(x) = |x|$ は $x = 0$ で微分できない.

(4) 正. 平均値の定理によって, (a, b) 上で $f(x) - g(x)$ は定数である. その定数を c とおけば, $f(x) = g(x) + c$. 仮定から,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x)$$

なので, $c = 0$ がわかる. よって, $f(x)$ と $g(x)$ は一致する.

(補注) 条件 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x)$ は, 「それぞれの極限值が存在して等しい」の意味. 拡大解釈して「それぞれの極限值が $\infty = \infty$ もこめて存在して等しい」の意味にとれば, 命題は不成立. 例えば,

$$f(x) = \frac{1}{(b-x)(x-a)}, \quad g(x) = \frac{1}{(b-x)(x-a)} + 100, \quad a < x < b.$$

4.4 次式で定義される関数 $f(x)$ について次の問に答えよ.

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & -1 \leq x \leq 0 \text{ のとき,} \\ x + 1 & 0 < x \leq 1 \text{ のとき.} \end{cases}$$

(1) $y = f(x)$ のグラフを描け.

(2) 次の積分を計算せよ.

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

(3) $y = F(x)$ のグラフを描け.

(4) $F'(x) = f(x)$ が成り立つかどうかを確かめよ. なぜそうなるかを説明せよ.

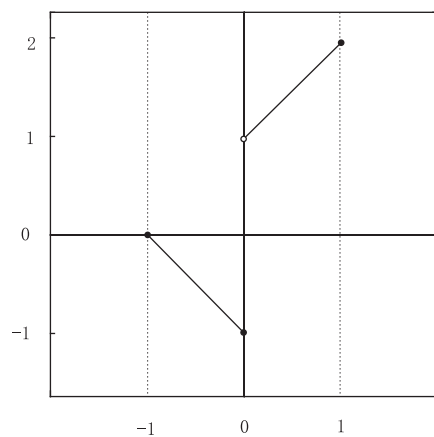
解説 (1)

(2) まず, $-1 \leq x \leq 0$ のときは,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^x (-t - 1) dt = \left[-\frac{t^2}{2} - t \right]_{t=-1}^{t=x} \\ &= \left(-\frac{x^2}{2} - x \right) - \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = -\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$0 < x \leq 1$ のときは,

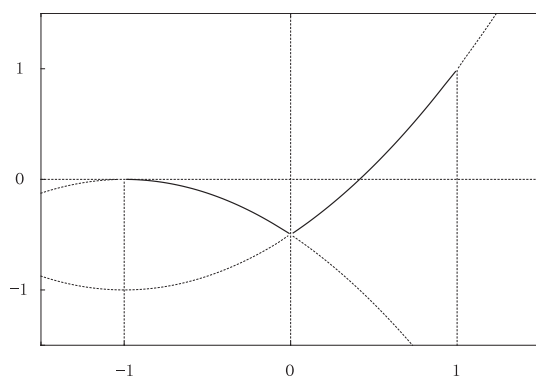
$$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^0 (-t - 1) dt + \int_0^x (t + 1) dt = -\frac{1}{2} + \left(\frac{x^2}{2} + x \right).$$



よって,

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2} & -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(3)



(4) $F'(x)$ は $-1 < x < 0$ のときは,

$$F'(x) = \left(-\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2} \right)' = -x - 1.$$

$0 < x < 1$ のときは,

$$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} \right)' = x + 1.$$

しかし, $x = 0$ では微分不可能. 実際,

$$D_+F(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{x^2}{2} + x}{x} = 1,$$

$$D_-F(0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{-\frac{x^2}{2} - x}{x} = -1.$$

したがって,

$$F'(x) = f(x), \quad -1 < x < 0, \quad 0 < x < 1.$$

$x = \pm 1$ は $F(x)$ の定義域の端点であるから, 片側微分係数しか定義されない. それらは $f(\pm 1)$ に一致する. $x = 0$ では, $F(x)$ は微分できない. $f(x)$ が $x = 0$ で連続でないことが, $F'(0)$ が存在しないことに影響している.

4.5 开区間で定義された C^2 -級関数 $f(x)$ に対して,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) + f(c-h) - 2f(c)}{h^2} = f''(c)$$

が成り立つことを証明せよ. 次に, $f'''(c)$ を求める類似の公式を導け.

解説 $0/0$ の不定形なので, ロピタルの定理を用いることができる.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) + f(c-h) - 2f(c)}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c+h) - f'(c-h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(c+h) + f''(c-h)}{2} \\ &= f''(c). \end{aligned}$$

平均値の定理を用いてもよい.

$$f(c+h) = f(c) + f'(c)h + \frac{f''(c+\theta_1h)}{2}h^2,$$

$$f(c-h) = f(c) - f'(c)h + \frac{f''(c-\theta_2h)}{2}h^2,$$

を満たす $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ が存在する. 両辺を加えて,

$$f(c+h) + f(c-h) = 2f(c) + \frac{1}{2}(f''(c+\theta_1h) + f''(c-\theta_2h))h^2.$$

よって,

$$\frac{f(c+h) + f(c-h) - 2f(c)}{h^2} = \frac{1}{2}(f''(c+\theta_1h) + f''(c-\theta_2h)).$$

ここで, $h \rightarrow 0$ とすればよい.

上のアイデアを高階微分に適用してみよう．平均値の定理によって，

$$\begin{aligned} f(c+h) &= f(c) + f'(c)h + \frac{f''(c)}{2}h^2 + \frac{f'''(c+\theta_1h)}{6}h^3, \\ f(c-h) &= f(c) - f'(c)h + \frac{f''(c)}{2}h^2 - \frac{f'''(c-\theta_2h)}{6}h^3, \end{aligned}$$

を満たす $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ が存在する．両辺の差をとると，

$$f(c+h) - f(c-h) = 2f'(c)h + \frac{h^3}{6}(f'''(c+\theta_1h) + f'''(c-\theta_2h)). \quad (4.5.1)$$

同様にして，

$$f(c+2h) - f(c-2h) = 4f'(c)h + \frac{8h^3}{6}(f'''(c+2\theta_3h) + f'''(c-2\theta_4h)). \quad (4.5.2)$$

(4.5.1)×2−(4.5.2) を計算すると，

$$\begin{aligned} &2(f(c+h) - f(c-h)) - (f(c+2h) - f(c-2h)) \\ &= \frac{2h^3}{6}(f'''(c+\theta_1h) + f'''(c-\theta_2h)) \\ &\quad - \frac{8h^3}{6}(f'''(c+2\theta_3h) + f'''(c-2\theta_4h)). \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h^3} \{2(f(c+h) - f(c-h)) - (f(c+2h) - f(c-2h))\} \\ &= \frac{1}{3}(f'''(c+\theta_1h) + f'''(c-\theta_2h)) \\ &\quad - \frac{4}{3}(f'''(c+2\theta_3h) + f'''(c-2\theta_4h)). \end{aligned}$$

ここで $h \rightarrow 0$ を考えると，

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \{2(f(c+h) - f(c-h)) - (f(c+2h) - f(c-2h))\} \\ &= \frac{1}{3} \times 2f'''(c) - \frac{4}{3} \times 2f'''(c) = -2f'''(c). \end{aligned}$$

よって，

$$f'''(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{-2h^3} \{2(f(c+h) - f(c-h)) - (f(c+2h) - f(c-2h))\}.$$

整理して，

$$f'''(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+2h) - 2f(c+h) + 2f(c-h) - f(c-2h)}{2h^3}.$$

4.6 関数

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

について次の問に答えよ.

(1) $f'(x)$ を求めよ.

(2) $y = f(x)$ のグラフを ($f(x)$ が定義される範囲で) 美しく描け.

解説 (1) $(\arctan x)' = \frac{1}{x^2 + 1}$ は既知としよう.

$$f'(x) = (\arctan x)' + \left(\arctan \frac{1}{x} \right)' = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{\left(\frac{1}{x} \right)^2 + 1} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 0.$$

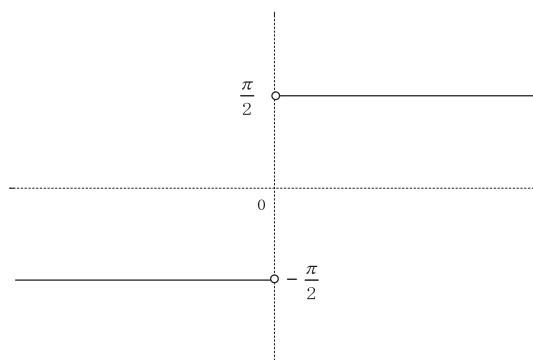
したがって, $f'(x) = 0$.

(2) $f(x)$ の定義域は互いに交わらない 2 つの区間 $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ である. 導関数が 0 であるから, $f(x)$ はそれぞれの区間上では定数であるが, 導関数の情報ではそれらが等しいとは言えない. 実際, この場合では, $x > 0$ のときは,

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = 2 \arctan 1 = \frac{\pi}{2}.$$

$x < 0$ のときは,

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = 2 \arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$



関連問題 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ の導関数を求め, それから結論付けられることを述べよ.

4.7 $f(x)$ が $(0, +\infty)$ で微分可能であり, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = a$ を満たすとする.

(1) そのような関数 $f(x)$ で 1 次関数でないものの具体例を 1 つあげよ.

(2) $h > 0$ とするとき, $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x+h) - f(x)\}$ を求めよ.

解説 (1) たとえば,

$$f'(x) = a + \frac{1}{x^2}$$

は, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = a$ を満たす. 積分した

$$f(x) = ax - \frac{1}{x}$$

などを考えればよい. 一般には, $f'(x) = a + g(x)$ で $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ を満たすものを考えればよい.

(2) 平均値の定理で,

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+\theta h)h$$

を満たす $0 < \theta = \theta(x, h) < 1$ がとれる. 仮定から, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $M > 0$ が存在して,

$$|f'(x) - a| < \epsilon, \quad x > M.$$

したがって, $x > M$ であれば, $x + \theta h > M$ であり,

$$|f'(x + \theta h) - a| < \epsilon$$

が成り立つ, よって,

$$|f(x+h) - f(x) - ah| = |f'(x+\theta h)h - ah| < \epsilon h, \quad x > M.$$

したがって,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x+h) - f(x)\} = ah.$$

4.8 ルジャンドルの多項式を

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

で定義する. 次の問に答えよ.

(1) $P_n(x)$ は n 次多項式であることを証明し, x^n の係数を求めよ.

(2) 方程式 $P_n(x) = 0$ は $(-1, +1)$ において相異なる n 個の根をもつことを証明せよ.

解説 (1) $(x^2 - 1)^n = x^{2n} + \dots$ であるから,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{2n} + \dots) = \frac{1}{2^n n!} \{(2n)(2n-1)\dots(n+1)x^n + \dots\}$$

よって, $P_n(x)$ は n 次多項式であり, x^n の係数は,

$$\frac{1}{2^n n!} (2n)(2n-1)\dots(n+1) = \frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}.$$

書き換えはいろいろあり得る:

$$\begin{aligned}(2n)! &= (2n)(2n-1)(2n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \\ &= (2n)(2n-2)\cdots 2 \times (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1 \\ &= 2^n n! \times (2n-1)!!\end{aligned}$$

を用いれば,

$$\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{2^n n! \times (2n-1)!!}{2^n (n!)^2} = \frac{(2n-1)!!}{n!}.$$

(2) $n \geq 1$ として,

$$f(x) = (x^2 - 1)^n = (x+1)^n (x-1)^n$$

とおく. $k = 1, 2, \dots, n$ に対して, $f^{(k)}(x) = 0$ は, 少なくとも k 個の相異なる根を $(-1, 1)$ にもつことを帰納法で示そう.

$k = 1$ のとき. $f(1) = f(-1) = 0$ であるから, Rolle の定理で, $(-1, 1)$ に $f'(x) = 0$ となる x が存在する (いくつ存在するかは問題ではない). よって, $k = 1$ のときの主張は正しい.

$k \geq 1$ として k まで主張が正しいとする. つまり, $-1 < x_1 < \cdots < x_k < 1$ で

$$f^{(k)}(x_1) = f^{(k)}(x_2) = \cdots = f^{(k)}(x_k) = 0 \quad (4.8.1)$$

をみたすものが存在すると仮定する. $k+1 \leq n$ の仮定の下で, $k+1$ について命題が正しいことを証明しよう.

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} (x+1)^n (x-1)^n = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \{(x+1)^n\}^{(j)} \{(x-1)^n\}^{(k-j)}$$

であり, $k \leq n-1$ であるから, $f^{(k)}(-1) = f^{(k)}(1) = 0$. すでに, (4.8.1) が得られているから, Rolle の定理によって, 各区間 $(-1, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_k, 1)$ に少なくとも1個ずつ $f^{(k+1)}(x) = 0$ をみたす x が存在する. したがって, $f^{(k+1)}(x) = 0$ は少なくとも $k+1$ 個の相異なる根を $(-1, 1)$ にもつ. これで帰納法による証明が完成した.

特に, $f^{(n)}(x) = 0$ は, 少なくとも n 個の相異なる根を $(-1, 1)$ にもつ. 一方, $P_n(x)$ は $f^{(n)}(x)$ の定数倍であり, それは n 次多項式であるから, $P_n(x) = 0$ は相異なる根を n 個もち, それらは $(-1, 1)$ にある.

関連問題 $n = 1, 2, \dots$ に対して,

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}$$

によって定義される $H_n(x)$ を考える. ただし, $H_0(x) = 1$ とする.

(1) $H_n(x)$ は n 次多項式あることを示せ.

(2) $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$ を示せ.

(3) $H_n(x)$ の隣り合う2根 $\alpha < \beta$ の間に $H_{n-1}(x)$ の根がちょうど1つあることを証明せよ.

(4) $H_n(x) = 0$ の n 個の根はすべて実数であり, 相異なることを示せ.

(注意) 上の $H_n(x)$ をエルミート多項式と呼ぶ.

4.9 次式で定義される関数 $f(x)$ について問に答えよ.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{1/x}} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

- (1) $f(x)$ は $x = 0$ で連続か?
- (2) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能か?
- (3) 次をみたす定数 a, b を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \{f(x) - (ax + b)\} = 0.$$

解説 (1) $x \neq 0$ において C^∞ -級であることは明らか.

$$\lim_{x \rightarrow +0} e^{1/x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} e^{1/x} = 0,$$

に注意しておこう.

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{1 + e^{1/x}} = 0 = f(0), \quad \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x}{1 + e^{1/x}} = 0 = f(0),$$

から, $f(x)$ は $x = 0$ で連続である.

(2) 右微分係数は,

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\frac{h}{1 + e^{1/h}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{1 + e^{1/h}} = 0.$$

左微分係数は,

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{1}{1 + e^{1/h}} = 1.$$

よって, 左右微分係数が一致しないので, $f(x)$ は $x = 0$ において微分不能.

$y = f(x)$ のグラフを描くにあたって,

$$f'(x) = \frac{(1 + e^{1/x}) - x(-\frac{1}{x^2} e^{1/x})}{(1 + e^{1/x})^2} = \frac{1 + e^{1/x} + \frac{1}{x} e^{1/x}}{(1 + e^{1/x})^2} > 0, \quad x \neq 0,$$

ゆえ, つねに増加の状態にある. また,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + e^{1/x} + \frac{1}{x} e^{1/x}}{(1 + e^{1/x})^2} = \frac{1}{2}$$

に注意しよう.

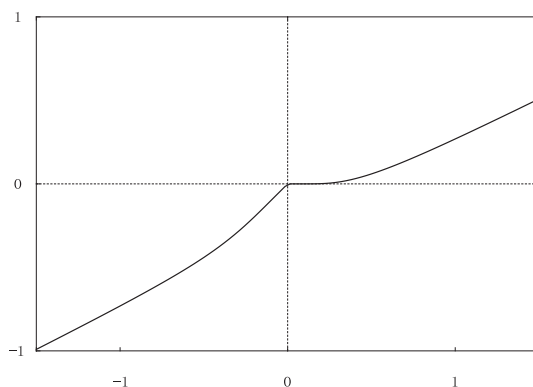


図 4.9.1: 問題 4.9

(3) まず,

$$\begin{aligned}
 0 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{x}{1 + e^{1/x}} - (ax + b) \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - (1 + e^{1/x})(ax + b)}{1 + e^{1/x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - a - ae^{1/x})x - (1 + e^{1/x})b}{1 + e^{1/x}}.
 \end{aligned}$$

ここで, $x = \frac{1}{t}$ とおくほうが若干見やすいだろう.

$$\begin{aligned}
 0 &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(1 - a - ae^t)\frac{1}{t} - (1 + e^t)b}{1 + e^t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{1 + e^t} \left(\frac{1 - a - ae^t}{t} - (1 + e^t)b \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{1 + e^t} \left(-a \frac{e^t - 1}{t} + \frac{1 - 2a}{t} - (1 + e^t)b \right). \tag{4.9.1}
 \end{aligned}$$

さて,

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{1 + e^t} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{t \rightarrow +0} \frac{e^t - 1}{t} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow +0} (1 + e^t) = 2,$$

などから, (4.9.1) は,

$$0 = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{2} \left(-a + \frac{1 - 2a}{t} - 2b \right)$$

となる. よって,

$$1 - 2a = 0, \quad -a - 2b = 0,$$

が導かれ,

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{4}.$$

(補足) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \{f(x) - (ax + b)\} = 0$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - (ax + b)}{x} = 0$$

も当然成り立ち,

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

で求められることがわかる.

関連問題 $x = a$ を含む开区間 I で定義された連続関数 $f(x)$ が,

(i) $x \neq a$ において微分可能で,

(ii) 極限值 $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ が存在する

ならば, $f(x)$ は $x = a$ でも微分可能で,

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$$

であることを示せ. [ヒント: 平均値の定理]

関連問題

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \text{ のとき,} \\ 0 & x \leq 0 \text{ のとき,} \end{cases}$$

とおく. 次の問に答えよ.

(1) 任意の自然数 n に対して,

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{2n}} e^{-1/x}, \quad x > 0,$$

となる高々 $n - 1$ 次多項式 $p_n(x)$ が存在することを示せ.

(2)

$$\lim_{x \rightarrow +0} f^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow -0} f^{(n)}(x) = 0$$

を示せ.

(3) $f(x)$ は $x = 0$ においても無限回連続的微分可能であることを示せ.

4.10 $\alpha = \arctan \frac{1}{5}$ とおく.

(1) 次の等式を示せ.

$$\tan 4\alpha = 1 + \frac{1}{119}, \quad 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

(2) 近似式 $\arctan x \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$ を用いて, π の近似値を小数第3位まで求めよ.

解説 $\tan \alpha = 1/5$ であるから

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{5}{12}.$$

さらに,

$$\tan 4\alpha = \frac{2 \tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} = \frac{5}{6} \bigg/ \frac{119}{12^2} = \frac{120}{119} = 1 + \frac{1}{119}.$$

次に,

$$\tan \left(4\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan 4\alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan 4\alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{119} \bigg/ \frac{239}{119} = \frac{1}{239}.$$

よって,

$$\arctan \frac{1}{239} = 4\alpha - \frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \frac{\pi}{4}.$$

(2) まず,

$$4 \arctan \frac{1}{5} \approx 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} \right)^5 \right) = 0.789589333.$$

小数第3位まで正しく求めればよいので,

$$\arctan \frac{1}{239} \approx \frac{1}{239} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{239} \right)^3 = 0.004184076$$

を用いれば十分. これらから,

$$\pi \approx 4(0.789589333 - 0.004184076) = 3.141621029$$

これは小数第3位まで正しく, $\pi \approx 3.141$.

(補注) $\frac{1}{5} \left(\frac{1}{239} \right)^5 = 2.565 \times 10^{-13}.$

関連問題 次式を示せ.

$$\frac{\pi}{4} = 5 \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{3}{79} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$$

関連問題 $\arctan x + \arctan y + \arctan z = 0$ ならば $x + y + z = xyz$.

4.11 $a > 1$ を定数とする. $x \geq 0$ で定義された関数列

$$f_n(x) = x^n a^{-x}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

を考える.

- (1) $x > 0$ の範囲において, $f'_n(x) = 0$ を満たす x がただ1つ存在することを示せ.
- (2) $n = 1, 2, 3$ に対して $y = f_n(x)$ のグラフの概形を示せ.
- (3) (1) で定まる x を x_n とするとき, 次の値を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n).$$

解説 (1) $f_n(x) = x^n a^{-x} > 0$ に注意して, 両辺の対数をとると,

$$\log f_n(x) = n \log x - x \log a.$$

微分して,

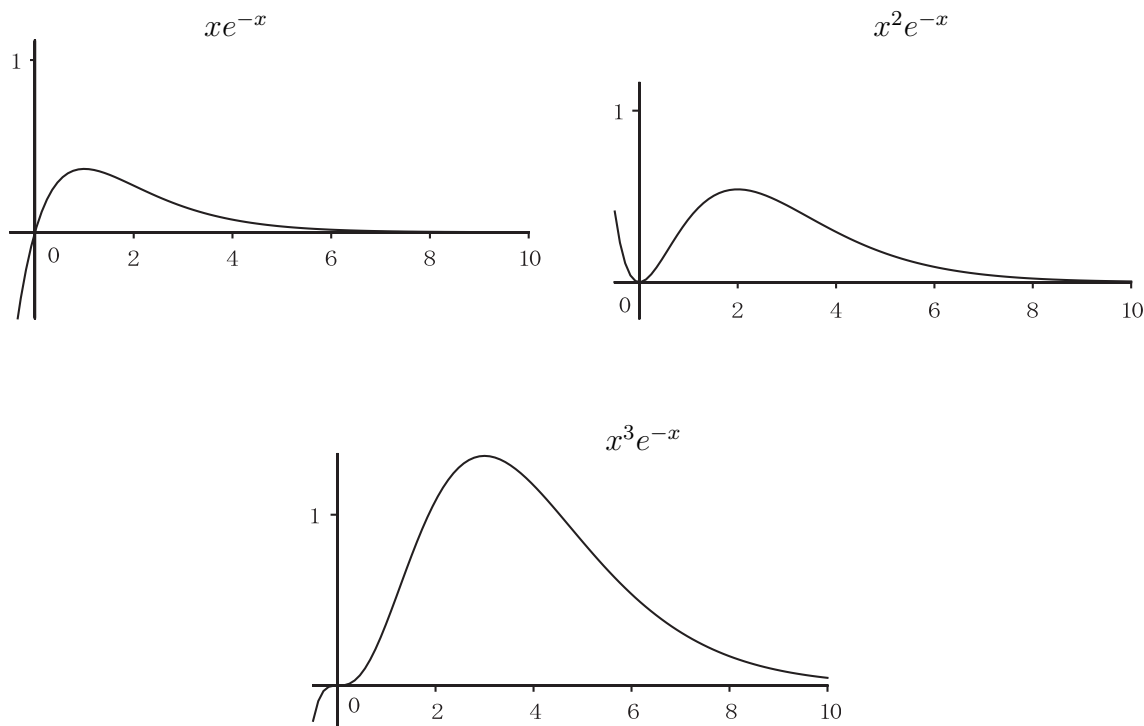
$$\frac{f'_n(x)}{f_n(x)} = \frac{n}{x} - \log a = \frac{n - x \log a}{x}.$$

今, $x > 0$ を考えているので, $f'_n(x) = 0$ となるのは, $x = \frac{n}{\log a}$ だけであり, その点で $f'_n(x)$ は正から負に値を変える. つまり, $x = \frac{n}{\log a}$ で $f_n(x)$ は極大となる.

(2) $a = e$ として描いた図を示す. 一般の a の場合は, x 軸と y 軸のスケールが変化する. 原点でのグラフの立ち上がり方に注意. $x \approx 0$ においては $e^{-x} \approx 1$ であるから, 原点におけるグラフの形状は, それぞれ

$$xe^{-x} \approx x, \quad x^2e^{-x} \approx x^2, \quad x^3e^{-x} \approx x^3,$$

なのである.



(3) すでに計算したことから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log a} = \infty.$$

また,

$$f_n(x_n) = x_n^n a^{-x_n} = \left(\frac{n}{\log a} \right)^n a^{-\frac{n}{\log a}}.$$

ここで、 $b = a^{-\frac{n}{\log a}}$ において両辺の対数をとると、

$$\log b = -\frac{n}{\log a} \log a = -n$$

だから $b = e^{-n}$. したがって、

$$f_n(x_n) = x_n^n a^{-x_n} = \left(\frac{n}{e \log a} \right)^n.$$

よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = \infty.$$

4.12 次の命題はいずれも誤りである. 誤りであることを例 (反例という) によって説明せよ.

- (1) 連続関数 $f(x)$ が、 $x = a$ において右微分可能かつ左微分可能であれば、その点で微分可能である.
- (2) 閉区間 $[0, 1]$ 上で定義された連続関数列 $f_n(x)$ が極限関数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ をもつとする. $0 \leq x_n \leq 1$ を満たす数列が $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = a$ ならば、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(a)$ である.
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ のとき、適当な $n \geq 1$ をとれば、 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-nx} f(x) = 0$ とできる.

解説 (1) たとえば、 $f(x) = |x|$ を考えてみよう. 連続関数であることは明らか. $x = 0$ において右微分は $+1$, 左微分は -1 である. これらは一致しないので、 $x = 0$ では微分できない. 実際、 $y = |x|$ のグラフから明らかなように、 $x = 0$ においてグラフは尖っている.

(2) $f_n(x) = x^n$ を考えよう. 極限関数は、

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

ここで、 $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ を考えると、

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

また、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = e^{-1}.$$

しかし、 $f(a) = f(1) = 1$ であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \neq f(a).$$

(3) $x \rightarrow \infty$ において, e^{nx} (n : 定数) は多項式に比べれば, はるかに速く発散するが, もっと速く発散する関数はいくらでも作れる. たとえば,

$$f(x) = e^{x^2}$$

を考えてみよう. どのような n をとっても,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-nx} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2 - nx} = \infty$$

である.

関連問題 (2) の反例では, $f(x)$ が連続関数になっていない. 問題を「閉区間 $[0, 1]$ 上で定義された連続関数列 $f_n(x)$ が連続な極限関数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ をもつとする.」と変更したとき, この命題は正しいか?

4.13 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (4.13.1)$$

とおく.

- (1) $H_n(x)$ は n 次多項式であることを示し, 最高次の係数を求めよ.
- (2) $xH_n(x)$ を $H_0(x), H_1(x), \dots$ の線型結合として表せ.
- (3) $H'_n(x)$ を $H_0(x), H_1(x), \dots$ の線型結合として表せ.

解説 (1) 初めの数項を計算してみるのがよい.

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$

となっている. これらから,

$$H_n(x) = (2x)^n + P_{n-2}(x),$$

$$P_{n-2}(x) \text{ は高々 } n-2 \text{ 次の多項式 } (P_{-2}(x) = P_{-1}(x) = 0 \text{ とする})$$

と表されることが予想される. このことを帰納法で示す. $n = 0$ については, すでに示されているように, この予想は正しい. $n \geq 0$ として, n までこの予想が正しいと仮定する. つまり,

$$(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = (2x)^n + P_{n-2}(x)$$

が成り立つ. 両辺に e^{-x^2} をかけて, x で微分しよう.

$$\begin{aligned} (-1)^n \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2} &= \frac{d}{dx} ((2x)^n + P_{n-2}(x)) e^{-x^2} \\ &= (2n(2x)^{n-1} + P'_{n-2}(x)) e^{-x^2} - 2x((2x)^n + P_{n-2}(x)) e^{-x^2} \\ &= (-(2x)^{n+1} + 2n(2x)^{n-1} + P'_{n-2}(x) - 2xP_{n-2}(x)) e^{-x^2}. \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2} \\ &= (2x)^{n+1} - 2n(2x)^{n-1} - P'_{n-2}(x) + 2xP_{n-2}(x). \end{aligned}$$

ここで, $-2n(2x)^{n-1} - P'_{n-2}(x) + 2xP_{n-2}(x)$ は, 高々 $n-1$ 次多項式である. これを $P_{n-1}(x)$ とおくと,

$$H_{n+1}(x) = (2x)^{n+1} + P_{n-1}(x)$$

となり, 予想は $n+1$ のときも正しいことが示された. したがって, $H_n(x)$ は最高次の係数が 2^n である n 次多項式である.

(2) $H_n(x)$ の定義 (4.13.1) の右辺の微分を 1 回計算すると,

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (-2xe^{-x^2}).$$

ここで, ライブニッツの公式を用いれば,

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (-2xe^{-x^2}) &= \binom{n-1}{0} (-2x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} + \binom{n-1}{1} \frac{d}{dx} (-2x) \cdot \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} e^{-x^2} \\ &= -2x \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} - 2(n-1) \cdot \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} e^{-x^2}. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} H_n(x) &= (-1)^n \left\{ -2x e^{x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} - 2(n-1) e^{x^2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} e^{-x^2} \right\} \\ &= 2x(-1)^{n-1} e^{x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} - 2(n-1)(-1)^{n-2} e^{x^2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} e^{-x^2} \\ &= 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x). \end{aligned}$$

移行して番号を付け替えれば,

$$xH_n(x) = \frac{1}{2} H_{n+1}(x) + nH_{n-1}(x). \quad (4.13.2)$$

ただし, $n=0$ の場合は,

$$xH_0(x) = \frac{1}{2} H_1(x)$$

である. $H_{-1}(x) = 0$ とおけば, (4.13.2) に含めることができる.

(3) (4.13.1) の両辺を x で微分して,

$$\begin{aligned} H'_n(x) &= (-1)^n \left\{ 2xe^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} + e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2} \right\} \\ &= 2x(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} - (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2}. \end{aligned}$$

よって

$$H'_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x). \quad (4.13.3)$$

(2) の結果を利用して,

$$H'_n(x) = \{H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x)\} - H_{n+1}(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

よって,

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(注意) (4.13.3) は題意にあわない. $H_0(x), H_1(x), \dots$ の線型結合とは, それらの係数が定数でなければならない. (4.13.3) では, $H_n(x)$ の係数が定数になっていない.

(注意) $H_n(x)$ を n 次エルミート多項式と呼ぶ. 応用上, 重要な多項式である.

関連問題 $H_n(x) - (2x)^n$ の最高次の係数を求めよ.

4.14 $x > 0$ で次の不等式が成り立つことを示せ.

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} < \arctan x < x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}.$$

(発展: 解答任意) 次に, 上の不等式の類似を考察せよ.

解説 まず,

$$f(x) = \arctan x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \right)$$

とおいて, $f(x) > 0$ ($x > 0$) を示そう. 発想は高校級である.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - (1 - x^2 + x^4 - x^6) = \frac{x^8}{1+x^2} > 0$$

がすべての x で成り立つ. よって, $f(x)$ はつねに狭義単調増加. よって, 任意の $x > 0$ において, $f(x) > f(0) = 0$.

次に,

$$g(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \arctan x$$

とおく.

$$g'(x) = 1 - x^2 + x^4 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^6}{1+x^2} > 0$$

がすべての x で成り立つ. よって, $g(x)$ はつねに狭義単調増加. よって, 任意の $x > 0$ において, $g(x) > g(0) = 0$.

関連問題 $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ で

$$x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

が成り立つことを示せ. 次に, この不等式の一般化を考察せよ.

4.15 $f(x)$ を $[0, 1]$ 上で連続, $(0, 1)$ 上で微分可能, $f(0) = f(1) = 0$ を満たす関数とする.

- (1) $g(x) = f(x)e^{-x}$ とおく. $g'(c) = 0$ を満たす c が $0 < c < 1$ の範囲に存在することを示せ.
- (2) α を任意の実数とすると, $f'(c) = \alpha f(c)$ を満たす c が $0 < c < 1$ の範囲に存在することを示せ.

解説 (1) $f(x)$, e^{-x} とともに $[0, 1]$ 上で連続, $(0, 1)$ 上で微分可能であるから, それらの積である $g(x)$ もそうである. さらに, $g(0) = g(1) = 0$ も明らか. よって, ロルの定理によって, $g'(c) = 0$ を満たす c が $0 < c < 1$ の範囲に存在する.

(2) $g(x) = f(x)e^{-\alpha x}$ とおくと, (1) と同様な理由によって, $g'(c) = 0$ を満たす c が $0 < c < 1$ の範囲に存在する. ところで,

$$g'(x) = f'(x)e^{-\alpha x} - \alpha f(x)e^{-\alpha x} = (f'(x) - \alpha f(x))e^{-\alpha x}$$

であるから, $g'(c) = 0$ は, $f'(c) - \alpha f(c) = 0$ を意味する.

関連問題 $f(x)$ を $(0, 1)$ 上で微分可能な関数で,

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 1} f(x) = \infty$$

であるとする. このとき, 任意の α に対して $f'(c) = \alpha$ をみたす c が $0 < c < 1$ の範囲に存在することを示せ. [ヒント: $y = f(x)$ 上に 1 点 (x_0, y_0) をとり, $y = \alpha(x - x_0) + y_0$ との共有点を考えよ.]

4.16

- (1) $y = \arcsin x$ のグラフの概形を示せ.
- (2) $(\arcsin x)'$ を求めよ.
- (3) $\arcsin x$ を $x = 0$ のまわりでテーラー展開し,

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (\text{A})$$

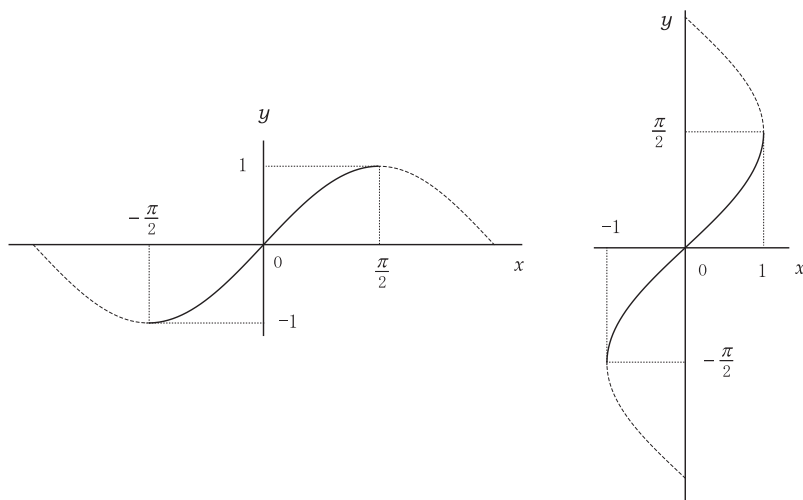
とおくとき, a_n を具体的な n の式で表せ.

- (4) (A) の部分

$$f(x) = \sum_{n=0}^5 a_n x^n \quad (5 \text{ 次の近似式})$$

を考える. $\arcsin 1 - f(1)$ を小数第 3 位以下を切り捨てて, 小数第 2 位まで求めよ.

解説 (1) $y = \arcsin x$ は $y = \sin x$ の定義域を $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ に制限したものの逆関数である。それらのグラフは、直線 $y = x$ に関して対称の位置にある。



(2) $y = \arcsin x$ とすると, $x = \sin y$. 両辺を x で微分して,

$$1 = y' \cos y.$$

よって,

$$(\arcsin x)' = y' = \frac{1}{\cos y}.$$

ここで, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ のとき, $\cos y \geq 0$ であるから,

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

よって,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(3) 二項展開によって,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n x^{2n}.$$

これを 0 から x まで積分して,

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

ここで, 二項係数を計算しておこう.

$$\begin{aligned} \binom{-1/2}{n} &= \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \left(-\frac{1}{2} - 2\right) \cdots \left(-\frac{1}{2} - (n-1)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!}. \end{aligned}$$

こうして,

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

(4) (3) の結果から,

$$f(x) = \sum_{n=0}^2 \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5.$$

したがって,

$$f(1) = 1 + \frac{29}{120} = 1.2416\dots$$

よって,

$$\arcsin 1 - f(1) = \frac{\pi}{2} - f(1) = 1.570\dots - 1.241\dots = 0.328\dots \approx 0.32.$$

関連問題 次の命題は誤りである. なぜ誤りかを実例 (反例という) によって説明せよ.

- (1) $[0, 1]$ 上定義された連続関数 $f(x)$ が $f(0) = f(1)$ をみたせば, $f'(c) = 0$ をみたす c が $0 < c < 1$ の範囲に存在する.
- (2) $[0, 1]$ 上定義された有界な関数 $f(x)$ はリーマン積分可能である.

解説 (1) ロルの定理に似ているが, 微分可能性が仮定されていないので誤りである. 反例としては,

$$f(x) = |2x - 1|$$

などを考えればよい. 連続で $f(0) = f(1) = 1$ は明らかである. しかし, $x \neq 1/2$ では $f(x)$ は微分可能であるが微分係数は ± 2 . $x = 1/2$ では $f(x)$ は微分不可能である. よって, $f'(c) = 0$ をみたす c は $0 < c < 1$ の範囲に存在しない.

(2) たとえば,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ が有理数,} \\ 0 & x \text{ が無理数,} \end{cases}$$

を考えよう. $\Delta: 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ を $[0, 1]$ の分割とする. 各小区間から選ばれた代表点を $\xi_1, \dots, \xi_n$ とおく. リーマン和が

$$S(\Delta; \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

で定義される. さて, 代表点をすべて有理数に選ぶことができるが, そのときのリーマン和は 1. 一方, 代表点をすべて無理数に選べば, リーマン和は 0. どんなに細かい分割をとっても, 各小区間には必ず有理数と無理数が存在するから, リーマン和を 0 または 1 にする代表点のとり方が可能である. したがって, 分割を細かくしてゆくとき, 代表点のとり方によらずに, リーマン和が一定値に近づくことはありえない. つまり, $f(x)$ はリーマン積分不可能である.

4.17 次の問に答えよ.

- (1) 数列 $\{a_n\}$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$ をみたしても, その数列は収束するとは限らない. 例を示せ.
- (2) $x \sin x$ を $x = 0$ を中心としてテイラー展開 (マクローリン展開) せよ. ただし, 収束の議論は不要.
- (3) 次の極限值を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \log x}{2^x}$$

- (4) $y = \arcsin x$ の定義を述べ, 導関数を求めよ.
- (5) 次の積分を計算せよ.

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x}$$

解説 (1) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ とおくと,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1} - a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

しかし,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

証明は問題 5 または問題 13 を見よ.

ほかにもいろいろある: $a_n = \log n$, $a_n = \sqrt{n}$ など.

(2) $f(x) = \sin x$ を微分すると,

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f^{(3)}(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x.$$

よって, $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して,

$$f^{(4n)}(x) = \sin x, \quad f^{(4n+1)}(x) = \cos x, \quad f^{(4n+2)}(x) = -\sin x, \quad f^{(4n+3)}(x) = -\cos x.$$

これから,

$$f^{(4n)}(0) = 0, \quad f^{(4n+1)}(0) = 1, \quad f^{(4n+2)}(0) = 0, \quad f^{(4n+3)}(0) = -1.$$

よって $f(x) = \sin x$ の展開は,

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{f^{(4n)}(0)}{(4n)!} x^{4n} + \frac{f^{(4n+1)}(0)}{(4n+1)!} x^{4n+1} + \frac{f^{(4n+2)}(0)}{(4n+2)!} x^{4n+2} + \frac{f^{(4n+3)}(0)}{(4n+3)!} x^{4n+3} \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(4n+1)!} x^{4n+1} + \frac{-1}{(4n+3)!} x^{4n+3} \right\} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}.\end{aligned}$$

よって,

$$x \sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+2}.$$

(3) ロピタルの定理を用いよう.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \log x}{2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x \log x + x}{2^x \log 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \log x + 3}{2^x (\log 2)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2/x}{2^x (\log 2)^3} = 0.$$

(4) $y = \arcsin x$ は $y = \sin x$ の定義域を $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ に制限したものの逆関数である. $y = \arcsin x$ とすると, $x = \sin y$. 両辺を x で微分して,

$$1 = y' \cos y.$$

よって,

$$(\arcsin x)' = y' = \frac{1}{\cos y}.$$

ここで, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ のとき, $\cos y \geq 0$ であるから,

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

よって,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(5) 定石どおり,

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

とおけば,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

これらを用いて,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{1-t^2} dt \\ &= \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt = \log |1+t| - \log |1-t| = \log \left| \frac{1+t}{1-t} \right|\end{aligned}$$

$t = \tan \frac{x}{2}$ から x が 0 から $\pi/3$ まで変化するとき, t は 0 から $\tan \frac{\pi}{6} = 1/\sqrt{3}$ まで変化する. よって,

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} = \left[\log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right]_0^{1/\sqrt{3}} = \log \frac{1+1/\sqrt{3}}{1-1/\sqrt{3}} = \log \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \log(\sqrt{3}+2).$$

(別解)

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx.$$

ここで $s = \sin x$ とおくと, $ds = \cos x dx$ などを用いて,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} &= \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{ds}{1-s^2} = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s} \right) ds \\ &= \frac{1}{2} \left[\log \left| \frac{1+s}{1-s} \right| \right]_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+\sqrt{3}/2}{1-\sqrt{3}/2} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \log(2+\sqrt{3})^2 = \log(2+\sqrt{3}). \end{aligned}$$

注意

$$\log(2+\sqrt{3}) = \log \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{2} \log \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \log(7+4\sqrt{3}) = 2 \log(\sqrt{3}+1) - \log 2$$

4.18 $\alpha = \arctan \frac{1}{5}$ とおくとき, $\tan 2\alpha$, $\tan 4\alpha$ を求めよ. 次に, それらを利用して,

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

を証明せよ.

解説 $\tan \alpha = \frac{1}{5}$ であるから, 加法公式を用いて,

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2/5}{1 - (1/5)^2} = \frac{5}{12}.$$

もう 1 度加法公式を用いて,

$$\tan 4\alpha = \frac{2 \tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} = \frac{5/6}{1 - (5/12)^2} = \frac{120}{119}.$$

したがって,

$$\tan \left(4\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan 4\alpha - \tan(\pi/4)}{1 + \tan 4\alpha \tan(\pi/4)} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

よって,

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{239}.$$

これは証明すべき式と同じである.

関連問題 $\arctan x$ のテーラー展開を用いて, π の近似値を計算せよ.

第5章 テーラー展開

5.1 次の関数の $x = 0$ におけるテーラー展開を求めよ. (一般項を n の式で表すこと. ただし, 収束について議論しなくてよい.)

$$(1) y = \sinh x \cosh x \quad (2) y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \quad (3) y = \arccos x^2 \quad (4) y = (1+x)^{1/3}(1-x)^{1/3}$$

解説 (1) 指数関数に直すと,

$$y = \sinh x \cosh x = \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x}).$$

指数関数のテーラー展開 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (常識) を代入して,

$$y = \frac{1}{4} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} \right).$$

x の偶数巾はすべて消えることに注意して和をまとめると,

$$y = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

(2) まず,

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1 + \frac{2}{x^2 - 1} = 1 - \frac{2}{1 - x^2}.$$

等比級数の和の公式 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ を利用して,

$$y = 1 - \frac{2}{1 - x^2} = 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}.$$

(3) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-1/2}$ において, 一般化された二項展開を適用すれば,

$$(\arccos x)' = - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n.$$

$\arccos 0 = \pi/2$ に注意して積分すると,

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

このままでもよいが, 二項係数を計算すると,

$$\begin{aligned} \binom{-1/2}{n} &= \frac{(-1/2)(-1/2-1)\cdots(-1/2-n+1)}{n!} \\ &= \frac{(-1)(-1-2)\cdots(-1-2n+2)}{2^n n!} = \frac{(-1)(-3)\cdots(-2n+1)}{2^n n!} \\ &= \frac{(-1)^n (2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1}{2^n n!} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^n n! (2n)(2n-2)\cdots 2} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}. \end{aligned}$$

最後に, x を x^2 で置き換えて,

$$\arccos x^2 = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{x^{4n+2}}{2n+1}.$$

(4) $y = (1-x^2)^{1/3}$ と変形して一般化された二項展開を適用する.

$$y = (1-x^2)^{1/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} (-1)^n x^{2n}.$$

(注意) テーラー展開をするときは, $f^{(n)}(0)$ を直接計算する前に, 式を変形して既知のものに帰着するべし.

5.2 次の関数を $x = 1$ を中心としてテーラー展開せよ (ただし, 収束の議論は不要).

$$f(x) = x^{10}$$

$$g(x) = \log(x^2)$$

$$h(x) = \cos \pi x$$

解説 与えられた関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

の形に表せということである. テーラーの定理によって

$$a_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$$

であるが, 直接微分を計算するほかに色々工夫の余地がある.

(1) 二項展開すればよい.

$$f(x) = x^{10} = ((x-1)+1)^{10} = \sum_{n=0}^{10} \binom{10}{n} (x-1)^n.$$

(2) まず,

$$g(x) = \log(x^2) = 2 \log x = 2 \log(1 + (x - 1)).$$

一方, 等比級数の公式から

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n.$$

これを 0 から x まで積分して

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

よって,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n.$$

(3) まず,

$$\cos \pi x = \cos(\pi(x-1) + \pi) = -\cos \pi(x-1).$$

一方, $\cos x$ のテーラー展開は既知:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

よって,

$$h(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n)!} (x-1)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \pi^{2n}}{(2n)!} (x-1)^{2n}.$$

5.3 整数 $n \geq 1$ に対して $R_n(x)$ を

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_n(x)$$

によって定義する.

(1) $R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt$ を示せ.

(2) $|x| \leq \frac{1}{2}$ のとき, $|R_n(x)| \leq \frac{1}{4^{n+1}n}$ を示せ.

(3) 公式 $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ を用いて, π の値を小数第 4 位まで正確に求めよ.

解説

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_n(x)$$

の両辺を微分すると,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - + \cdots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + R'_n(x).$$

よって,

$$\begin{aligned} R'_n(x) &= \frac{1}{1+x^2} - (1 - x^2 + x^4 - + \cdots + (-1)^{n-1} x^{2n-2}) \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1 - (-x^2)^n}{1 - (-x^2)} = \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}. \end{aligned}$$

これを 0 から x まで積分して,

$$R_n(x) - R_n(0) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt.$$

ここで, $R_n(x)$ の定義式において $x=0$ とおくと $R_n(0)=0$ がわかるから, 題意が導かれた.

(2) (1) の関係式から, $x \geq 0$ のとき,

$$|R_n(x)| = \left| (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt \right| \leq \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt.$$

$x \leq 0$ のときは, 積分区間を逆に取ればよいが, 被積分関数が偶関数であることに注意すれば, x の正負にかかわらず,

$$|R_n(x)| = \left| (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt \right| \leq \int_0^{|x|} \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt.$$

ここで, 任意の t に対して

$$\frac{t^{2n}}{1+t^2} \leq t^{2n}$$

は明らかであるから, 積分の中を置き換えて,

$$|R_n(x)| \leq \int_0^{|x|} t^{2n} dt = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$$

さらに, $|x| \leq 1/2$ を用いて,

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)} \leq \frac{1}{2^{2n+1}2n} = \frac{1}{4^{n+1}n}.$$

(3) 簡単のため,

$$S_n(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

とおこう. そうすれば,

$$\pi = 4 \arctan \frac{1}{2} + 4 \arctan \frac{1}{3} = 4S_n \left(\frac{1}{2} \right) + 4R_n \left(\frac{1}{2} \right) + 4S_n \left(\frac{1}{3} \right) + 4R_n \left(\frac{1}{3} \right)$$

誤差項は (2) の評価から,

$$\left| 4R_n\left(\frac{1}{2}\right) + 4R_n\left(\frac{1}{3}\right) \right| \leq \frac{8}{4^{n+1}n} = \frac{1}{2^{2n-1}n}.$$

これが $< 10^{-5}$ なら, 通常は $\pi = 4S_n\left(\frac{1}{2}\right) + 4S_n\left(\frac{1}{3}\right)$ で小数第 4 位まで正しく求まる.

$$\frac{1}{2^{2n-1}n} < 10^{-5} \iff (2n-1)\log_{10} 2 + \log_{10} n > 5$$

をみたすような n は $\log_{10} 2 = 0.3010$ などから計算で求まる. 左辺は $n = 7$ で 4.75, $n = 8$ で 5.41 なので, $n = 8$ で計算すればかなり精度がよいはず. 実際, $A_n = 4S_n\left(\frac{1}{2}\right) + 4S_n\left(\frac{1}{3}\right)$ を計算すると次のようになる:

$$A_1 = 3.333333333$$

$$A_2 = 3.117283951$$

$$A_3 = 3.145576132$$

$$A_4 = 3.140850562$$

$$A_5 = 3.141741197$$

$$A_6 = 3.141561588$$

$$A_7 = 3.141599341$$

$$A_8 = 3.141591184$$

$$A_9 = 3.141592981$$

実際, $n \geq 6$ で小数第 4 位は確定している.

関連問題 整数 $n \geq 1$ に対して $R_n(x)$ を

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x) \quad (5.3.1)$$

によって定義する.

(1) $R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$ を示せ.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ が $-1 < x \leq 1$ で収束して, $\log(1+x)$ に等しいことを証明せよ.

(3) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2$ を示せ.

(4) $x \leq -1$ または $x > 1$ では, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ は発散していることを示せ.

5.4 次の関数を与えられた a のまわりでテーラー展開せよ. ただし, $(x-a)^n$ の係数は n の式で簡潔に書き下すこと.

$$(1) \cosh 2x + \sinh 2x \quad (a=1) \quad (2) \frac{\arctan 2x}{x} \quad (a=0) \quad (3) \sqrt{-x} \quad (a=-1)$$

解説 (1) 定義から $\cosh 2x + \sinh 2x = e^{2x} = e^2 e^{2(x-1)}$. e^x のテーラー展開は既知であることより,

$$\cosh 2x + \sinh 2x = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2(x-1))^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2 2^n}{n!} (x-1)^n.$$

(2) まず, $\arctan x$ であるが

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

これを 0 から x まで積分して

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

これは公式といってもよいものである. よって,

$$\frac{\arctan 2x}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (2x)^{2n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n}.$$

(3) 一般化された二項展開に持ち込めば簡単.

$$\begin{aligned} \sqrt{-x} &= \sqrt{1 - (x+1)} = \{1 - (x+1)\}^{1/2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-(x+1))^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^n (x+1)^n. \end{aligned}$$

ここで, $(x+1)^n$ の係数は, $n=0$ のときは 1, $n \geq 1$ のときは,

$$\begin{aligned} \binom{1/2}{n} (-1)^n &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{2} - 2\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} (-1)^n \\ &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} + 1\right) \left(-\frac{1}{2} + 2\right) \cdots \left(-\frac{1}{2} + n - 1\right)}{n!} \\ &= -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!} = -\frac{(2n)!}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)) 2^n n!} = -\frac{(2n)!}{2^{2n} n! n!}. \end{aligned}$$

よって,

$$\sqrt{-x} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n! n!} (x+1)^n.$$

5.5 次の関数 $f(x)$ を与えられた $x = a$ のまわりでテーラー展開し, $(x - a)^n$ の係数 c_n を求めよ. (テーラー級数の収束については議論する必要はない.)

(1) $\log(x^2 + 1), \quad a = 0$

(2) $\frac{\sinh x^2}{x^2}, \quad a = 0$

(3) $(2x + 1) \cos 2x, \quad a = \pi$

(4) $5x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 2, \quad a = -1$

解説 (1) まず, $g(x) = \log(x + 1)$ を考えるとよい.

$$g'(x) = (\log(x + 1))' = \frac{1}{x + 1} = (x + 1)^{-1}.$$

よって,

$$g^{(n+1)}(x) = ((x + 1)^{-1})^{(n)} = (-1)(-2) \dots (-n)(x + 1)^{-(n+1)} = (-1)^n n! (x + 1)^{-(n+1)}.$$

したがって,

$$\log(x + 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(n + 1)!} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

x を x^2 とおきなおして,

$$\log(x^2 + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{2n}.$$

(2) まず,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

は常識. よって,

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n - (-x)^n}{n!}.$$

n が偶数のときは $x^n - (-x)^n = 0$ であり, $n = 2m + 1$ が奇数のときは,

$$x^n - (-x)^n = 2x^{2m+1}.$$

よって,

$$\sinh x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m + 1)!}.$$

したがって,

$$\frac{\sinh x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2(2m+1)}}{(2m + 1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{4m}}{(2m + 1)!}.$$

(3) $(x - \pi)^n$ による無限和の形にしたいので, あらかじめ $y = x - \pi$ とおいて, y についての式にしておくで計算の見通しがよいだろう. (もちろん, $f^{(n)}(\pi)$ を直接計算しても良い.)

$$(2x + 1) \cos 2x = (2(y + \pi) + 1) \cos 2(y + \pi) = (2y + 2\pi + 1) \cos 2y.$$

$\cos z$ のテーラー展開は既知としよう.

$$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m}.$$

そうすると,

$$\begin{aligned} (2x + 1) \cos 2x &= (2y + 2\pi + 1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} (2y)^{2m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} (2y)^{2m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2\pi + 1)}{(2m)!} (2y)^{2m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(-4)^m}{(2m)!} y^{2m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2\pi + 1)(-4)^m}{(2m)!} y^{2m}. \end{aligned}$$

$y = x - \pi$ を代入して,

$$(2x + 1) \cos 2x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(-4)^m}{(2m)!} (x - \pi)^{2m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2\pi + 1)(-4)^m}{(2m)!} (x - \pi)^{2m}.$$

(4) $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 2$ とおく. 微分して,

$$f'(x) = 20x^3 - 6x^2 + 2x - 1$$

$$f''(x) = 60x^2 - 12x + 2$$

$$f^{(3)}(x) = 120x - 12$$

$$f^{(4)}(x) = 120.$$

したがって,

$$f(-1) = 5x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 2 = 11$$

$$f'(-1) = -29$$

$$f''(-1) = 74$$

$$f^{(3)}(-1) = -132$$

$$f^{(4)}(-1) = 120.$$

よって,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^4 \frac{f^{(n)}(-1)}{n!} (x + 1)^n \\ &= 11 + (-29)(x + 1) + \frac{74}{2!} (x + 1)^2 + \frac{-132}{3!} (x + 1)^3 + \frac{120}{4!} (x + 1)^4 \\ &= 11 - 29(x + 1) + 37(x + 1)^2 - 22(x + 1)^3 + 5(x + 1)^4. \end{aligned}$$

関連問題 次の関数 $f(x)$ を与えられた $x = a$ のまわりでテーラー展開せよ. (テーラー級数の収束については議論する必要はない.)

$$(1) \sin^2 x, \quad a = 0 \qquad (2) \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}, \quad a = 0$$

$$(3) \sqrt{x}, \quad a = 1 \qquad (4) 6x^5 - 3x^4 - x^2 + 2, \quad a = 1$$

5.6 自然対数の底 e が無理数であることを, 以下の手順で証明せよ. (教科書 p.84 の方法とは違うので注意.)

(1) 関数 e^x にテーラーの定理を適用して,

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} \quad (5.6.1)$$

を満たす $0 < \theta < 1$ が存在することを示せ.

(2) e が有理数であると仮定して $e = \frac{q}{p}$ とおく. ただし, p, q とも自然数である. (1)

で $n = p$ ととった式を考察して, $\frac{e^\theta}{p+1}$ は整数になることを示せ.

(3) $e < 3$ は既知として, 整数 $\frac{e^\theta}{p+1}$ のとり得る値を求めて, 矛盾を導け.

解説 (1) $(e^x)' = e^x$ なので,

$$(e^x)^{(n)} \Big|_{x=0} = 1.$$

よって, e^x にテーラーの定理を適用すれば,

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

をみたす $0 < \theta = \theta(x) < 1$ が存在する. これを $x = 1$ の場合書き下したものが, (5.6.1) である.

(2) (5.6.1) において $e = \frac{q}{p}$, $n = p$ とおくと,

$$\frac{q}{p} = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} + \frac{e^\theta}{(p+1)!}.$$

両辺に $p!$ をかけて移項すると

$$\frac{e^\theta}{p+1} = \frac{q}{p} p! - \sum_{k=0}^p \frac{p!}{k!} = q(p-1)! - \sum_{k=0}^p p(p-1) \cdots (p-k+1).$$

これは整数である.

(3) $e < 3, 0 < \theta < 1$ なので $1 < e^\theta < e < 3$. また, $p \geq 1$ であるから,

$$0 < \frac{e^\theta}{p+1} \leq \frac{e^\theta}{2} < \frac{3}{2}$$

一方, $\frac{e^\theta}{p+1}$ は整数であるから, その値は 1 でしかあり得ない. よって, $e^\theta = p+1$ は整数であり, $e^\theta = 2$ かつ $p = 1$ となる. すると,

$$e = \frac{q}{p} = q$$

となり, e 自身も整数である. ところが, (5.6.1) から

$$e > 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} > 2$$

であり, $e < 3$ は既知であるから $2 < e < 3$. これは e が整数であることと両立できない.

5.7 (1) 次の級数は発散することを証明せよ.

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$$

(2) S_n を

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

とおくとき, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$S_2 < S_4 < \cdots < S_{2n} < \cdots < S_{2n+1} < \cdots < S_3 < S_1$$

(3) (2) を利用して, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が収束することを示せ.

解説 (1) 次の基本的事実を再確認しておこう:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

問題5の解説に, 面積の比較による証明をのせてある. ここでは, もっと初等的な方法で示そう. まず,

$$\overbrace{\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n}}^{2^{n-1}} \geq \frac{1}{2^n} \times 2^{n-1} = \frac{1}{2}.$$

よって,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &\geq 1 + \overbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}^n = 1 + \frac{n}{2} \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

そうすれば,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

(2) $S_{2n-2} < S_{2n}$ を示そう.

$$S_{2n} = S_{2n-2} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = S_{2n-2} + \frac{1}{2n(2n-1)} > S_{2n-2}.$$

同様に, $S_{2n+1} < S_{2n-1}$ が示される. 最後に, $S_{2n} < S_{2n+1}$ を示せばよい. これは,

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} > S_{2n}$$

から明らかである.

(3) $\{S_{2n}\}$ は上に有界な単調増加数列であるから収束し, また, $\{S_{2n+1}\}$ は下に有界な単調減少数列であるから収束する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \beta$$

とおこう. $S_{2n} < \alpha \leq \beta < S_{2n+1}$ である. よって,

$$0 \leq \beta - \alpha < S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1}$$

であるから, $n \rightarrow \infty$ として, $\alpha = \beta$ がわかる. ここで, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \alpha$ を示そう. まず, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, N_1, N_2 が存在して,

$$|S_{2n} - \alpha| < \epsilon, \quad n \geq N_1; \quad |S_{2n+1} - \alpha| = |S_{2n+1} - \beta| < \epsilon, \quad n \geq N_2.$$

よって, $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$ とおけば,

$$|S_n - \alpha| < \epsilon, \quad n \geq N.$$

これは, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \alpha$ を示す.

5.8 定数 c を変化させることによって、曲線 $y = cx^2$ は y 軸を除いた全平面を埋め尽くすことを示せ. それらのすべての曲線に直交する曲線を求めよ. また、状況を図で示せ.

解説 y 軸を除いた全平面を埋め尽くすことを示すには、任意の点 (a, b) , $a \neq 0$, を通る曲線があることを示せばよい. $b = ca^2$ から $c = b/a^2$ ととれば、曲線 $y = (b/a^2)x^2$ がその与えられた点を通る.

(訂正) 元の問題文では、「定数 c を変化させることによって、曲線 $y = cx^2$ は全平面を埋め尽くすことを示せ」とあったが、 y 軸を表すことはできない. y 軸は、

$$\frac{y}{c} = x^2$$

と変形して、 $c \rightarrow \infty$ の極限と解釈できるが、もちろん ∞ は数ではなく、 c の変域からは除外されている.

$y = cx^2$ 上の点 (a, ca^2) における接線の傾きは、 $y' = 2cx$ から $2ca$ である. 求める曲線を $y = f(x)$ とおけば、

$$ca^2 = f(a), \quad f'(a) = -\frac{1}{2ca}.$$

これが、すべての c で成り立つので、 c を消去した方程式を考える. 簡単な変形で、

$$f'(a) = -\frac{1}{2ca} = -\frac{a}{2ca^2} = -\frac{a}{2f(a)}.$$

これが任意の a で成り立たなければならない. a を x と書き直して、

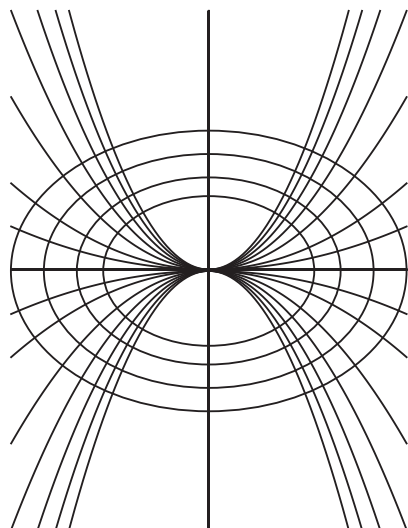
$$2f(x)f'(x) = -x$$

をえるが、左辺は $(f(x))^2$ の導関数であるから、両辺を積分して、

$$f(x)^2 = -\frac{x^2}{2} + C.$$

よって求める曲線は、

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = C \quad C: \text{任意の定数}.$$



関連問題 定数 c を変化させることによって, 曲線 $4x^2 + y^2 = c$ は全平面を埋め尽くすことを示せ. 次に, それらのすべての曲線に直交する曲線を求め, 状況を図で示せ.

5.9 $\arctan x$ にテーラーの定理を適用して円周率 π が 3.1 より大きいことを示せ.

解説 まず,

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

両辺を 0 から x まで積分して,

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

ここで, $\tan \theta = x$ が既知であって, できるだけ小さい値を入れて計算すればよい. たとえば, $\tan \pi/6 = 1/\sqrt{3}$ を用いると,

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{3^n}.$$

よって,

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{3^n}. \quad (5.9.1)$$

最初の数項を計算することで, π の近似値が得られる. どこまで計算すれば, 必要な精度が得

られるかは吟味しなければならない. (5.9.1) は交代級数であることに注意しよう:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{3^n} &= 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^3} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^3}\right) + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4k+1} \cdot \frac{1}{3^{2k}} - \frac{1}{4k+3} \cdot \frac{1}{3^{2k+1}}\right).\end{aligned}$$

最後の和においては, 各項は > 0 である. よって,

$$S_n = 2\sqrt{3} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{4k+1} \cdot \frac{1}{3^{2k}} - \frac{1}{4k+3} \cdot \frac{1}{3^{2k+1}}\right)$$

は単調増加して π に収束する:

$$S_0 < S_1 < S_2 < \cdots \rightarrow \pi.$$

$S_0 = 3.07\dots$, $S_1 = 3.13\dots$ であるから, $\pi > 3.13$.

(参考)

n	0	1	2	3	4
S_n	3.079201436	3.137852892	3.141308785	3.141568716	3.141590511

5.10 次の関数を $x = 2$ のまわりでテーラー展開せよ.

$$\frac{1}{x} \quad \frac{2}{x^2 - 1} \quad \sin \pi x \quad \log x$$

解説 (1) 高次導関数を計算してもよいが, 等比級数の公式も利用できる.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{1}{2 + (x-2)} = \frac{1/2}{1 + (x-2)/2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-2}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-2)^n.\end{aligned}$$

(2) いきなり高次導関数を計算するのは得策ではない.

$$\begin{aligned}\frac{2}{x^2 - 1} &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+(x-2)} - \frac{1}{3+(x-2)} \\ &= \frac{1}{1+(x-2)} - \frac{1/3}{1+(x-2)/3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-(x-2))^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-2}{3}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{(-1)^n - \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right\} (x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) (x-2)^n.\end{aligned}$$

(3) まず,

$$\sin \pi x = \sin(\pi(x-2) + 2\pi) = \sin \pi(x-2)$$

に注意しておく. $\sin x$ のテーラー展開をそのまま利用できる.

$$\sin \pi x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\pi(x-2))^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!} (x-2)^{2n+1}.$$

(4) まず,

$$\log x = \log\{2 + (x-2)\} = \log 2 \left(1 + \frac{x-2}{2}\right) = \log 2 + \log \left(1 + \frac{x-2}{2}\right).$$

ここで, $\log(1+x)$ のテーラー展開を利用して,

$$\log x = \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x-2}{2}\right)^n = \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n} (x-2)^n.$$

5.11 (1) 次の等式を証明せよ.

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k + \frac{(-t)^n}{1+t}$$

(2) (1) を用いて, 次の等式を示せ.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \log(1+x) + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt, \quad x > 0$$

(3) (2) を用いて, 次の級数の和を求めよ.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \dots$$

解説 (1) 等比数列の和は既知であろう:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k = \frac{1 - (-t)^n}{1 - (-t)}.$$

そうすれば示すべき等式は明らかである.

(2) (1) で両辺を 0 から $x > 0$ まで積分する.

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x (-t)^k dt + \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt$$

から

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt.$$

これは示すべき式と同じである.

(3) (2) で $x = 1$ を代入すると,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k+1} = \log 2 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt.$$

ここで,

$$\left| (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{t^n}{1+t} \right| dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty.$$

よって,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k+1} = \log 2.$$

第6章 積分

6.1 次の積分を計算せよ.

$$(1) \int x \arctan x \, dx \quad (2) \int \frac{2x+1}{x^3-1} \, dx \quad (3) \int \frac{dx}{e^x-1}$$

解説 (1)

$$\begin{aligned} \int x \arctan x \, dx &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 \arctan x + \arctan x - x) \end{aligned}$$

(2) 部分分数分解による.

$$\frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{2x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

の形に変形する. 両辺に $x-1$ をかけて $x=1$ とおくことで $a=1$ がわかる. そうすれば移項して $bx+c$ も確定し,

$$\frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+x+1}.$$

積分のために第2項の分子に $(x^2+x+1)' = 2x+1$ をくくり出すと,

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x^3-1} &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+x+1} \\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^3-1} \, dx &= \log(x-1) - \frac{1}{2} \log(x^2+x+1) + \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2} \\ &= \log \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

ここで公式

$$\int \frac{dx}{x^2 + A^2} = \frac{1}{A} \arctan \frac{x}{A}$$

を用いた.

(3) $e^x = t$ とおくと, $e^x dx = dt$. よって,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{e^x - 1} &= \int \frac{dt}{t(t-1)} = \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} \right) dt \\ &= -\log t + \log(t-1) = -x + \log(e^x - 1). \end{aligned}$$

見かけは違うが,

$$= -\log t + \log(t-1) = \log \frac{t-1}{t} = \log \left(1 - \frac{1}{t} \right) = \log(1 - e^{-x})$$

でも同じ.

6.2 次の関数の不定積分 (原始関数) を求め, 得られた不定積分を微分して正しいことを確かめよ.

$$(1) \frac{x^3}{(x+1)(x+2)(x+3)} \quad (2) \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (3) \frac{1}{1+a\cos x} \quad (0 < a < 1)$$

解説 (1) 分子, 分母ともに 3 次式で, $x^3 + \dots$ の形であるから, 割り算して商が 1 となる. 残りは部分分数に分解して,

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= \frac{(x+1)(x+2)(x+3) - 6x^2 - 11x - 6}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= 1 + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} \end{aligned}$$

とおく. 最後の表式を通分して, 係数を比較すれば,

$$A + B + C = -6, \quad 5A + 4B + 3C = -11, \quad 6A + 3B + 2C = -6.$$

これを解けば,

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = 8, \quad C = -\frac{27}{2}.$$

こうして,

$$\frac{x^3}{(x+1)(x+2)(x+3)} = 1 - \frac{1/2}{x+1} + \frac{8}{x+2} - \frac{27/2}{x+3}.$$

積分して,

$$\int \frac{x^3}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx = x - \frac{1}{2} \log|x+1| + 8 \log|x+2| - \frac{27}{2} \log|x+3|.$$

(2) $\sqrt{\quad}$ の中が ≥ 0 のときのみ関数として意味をもつ. したがって, 定義域は, $a < b$ なら $[a, b]$, $b < a$ ならば $[b, a]$ である. 以下の解答では $a < b$ の場合を扱う. $a > b$ の場合は,

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{1}{\sqrt{(x-b)(a-x)}}$$

であるから, a, b の役割を入れ替えたものが答えになる.

(解 1) 無理関数を含む場合の定石を用いる. $a < b$ から $b - x > 0$ に注意.

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{1}{b-x} \sqrt{\frac{b-x}{x-a}}.$$

ここで,

$$t = \sqrt{\frac{b-x}{x-a}}$$

とおく. 計算によって

$$x = \frac{at^2 + b}{t^2 + 1}, \quad b - x = \frac{(b-a)t^2}{t^2 + 1}, \quad dx = \frac{2(a-b)t}{(t^2 + 1)^2} dt$$

よって,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int \frac{t^2 + 1}{(b-a)t^2} \times t \times \frac{2(a-b)t}{(t^2 + 1)^2} dt = -2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = -2 \arctan t.$$

元に戻して,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = -2 \arctan \sqrt{\frac{b-x}{x-a}}. \quad (6.2.1)$$

(注意) $\arctan$ の公式

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

を用いると,

$$-2 \arctan \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} = -2 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} \right) = -\pi + 2 \arctan \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$$

となる. 不定積分は定数の差を無視するから,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2 \arctan \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$$

でもよいことがわかる.

(解 2) まず,

$$\begin{aligned} (x-a)(b-x) &= -x^2 + (a+b)x - ab \\ &= \frac{(a-b)^2}{4} - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(a-b)^2}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{2x}{a-b} - \frac{a+b}{a-b}\right)^2 \right\} \end{aligned}$$

と $a < b$ に注意して,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{2}{b-a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{a-b} - \frac{a+b}{a-b}\right)^2}}.$$

ここで変数変換

$$y = \frac{2x}{a-b}$$

を行うと,

$$dy = \frac{2}{a-b} dx$$

に注意して

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = - \int \frac{dy}{\sqrt{1 - \left(y - \frac{a+b}{a-b}\right)^2}} = - \arcsin \left(y - \frac{a+b}{a-b} \right).$$

変数を元に戻して,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = - \arcsin \left(\frac{2x}{a-b} - \frac{a+b}{a-b} \right) = - \arcsin \left(\frac{2x-a-b}{a-b} \right).$$

$\arcsin$ は奇関数であるから,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \arcsin \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right).$$

(注意) $\arcsin$ の公式

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

を用いれば,

$$\arcsin \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) = \frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right)$$

となる. 不定積分では定数の差は無視するから,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \arccos \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right)$$

でもよい. 逆三角関数の多様な公式によって, 問題の不定積分の表現は多様である. 自分の出した答えが, 見かけ上違っていても正しい場合がある. 微分して確認してみよ.

(3) 標準的な置換積分を施せばよい.

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

とおく.

$$1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2}{1 + \cos x} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

また,

$$dt = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \frac{dx}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

これらを代入して,

$$\int \frac{dx}{1+a \cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}a} dt = \int \frac{2}{(1+a)+(1-a)t^2} dt = \frac{2}{1+a} \int \frac{dt}{1+\frac{1-a}{1+a}t^2}.$$

ここで

$$s = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} t$$

とおくと,

$$\int \frac{dx}{1+a \cos x} = \frac{2}{1+a} \int \frac{1}{1+s^2} \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} ds = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \arctan s.$$

変数を元に戻せば,

$$\int \frac{dx}{1+a \cos x} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \tan \frac{x}{2} \right).$$

関連問題 (2) の解説において得られた 2 つの原始関数の差を求めよ:

$$-2 \arctan \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} - \arcsin \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right)$$

関連問題 次の積分を計算せよ. (学習の便宜のため答も載せておく).

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} &= 2 \log(\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}) \\ \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}} &= \log(x-a + \sqrt{(x-a)^2 + b^2}) \\ \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx &= \sqrt{a^2 - x^2} + a \log \left| \frac{x}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} \right| \\ \int \sqrt{\frac{x}{a^3 - x^3}} dx &= \frac{2}{3} \arcsin \left(\frac{x}{a} \right)^{3/2} \end{aligned}$$

6.3 次の関数の不定積分 (原始関数) を求め, 得られた不定積分を微分して正しいことを確かめよ.

$$(1) \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x} \quad (2) \sin \log x \quad (3) \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}}$$

解説 (1) $t = \tan \frac{x}{2}$ とおくと,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

これらを代入すれば,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{2t}{1+t^2+2t+1-t^2} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{2t}{(1+t)(1+t^2)} dt. \end{aligned}$$

ここで,

$$\frac{2t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{-1}{1+t} + \frac{1+t}{1+t^2} = \frac{-1}{1+t} + \frac{1}{2} \frac{(1+t^2)'}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}$$

に注意すれば,

$$\int \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx = -\log |1+t| + \frac{1}{2} \log |1+t^2| + \arctan t.$$

変数を元に戻して,

$$\begin{aligned} &= -\log \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{2} \log \left| \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \right| + \frac{x}{2} \\ &= -\log \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| - \log \left| \cos \frac{x}{2} \right| + \frac{x}{2} \\ &= -\log \left| \left(1 + \tan \frac{x}{2} \right) \cos \frac{x}{2} \right| + \frac{x}{2} \\ &= -\log \left| \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right| + \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

よって,

$$\int \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx = -\log \left| \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right| + \frac{x}{2}.$$

(2) 部分積分を2回行くと,

$$\begin{aligned} \int \sin \log x \, dx &= x \sin \log x - \int x \cos \log x \times \frac{1}{x} dx \\ &= x \sin \log x - \int \cos \log x \, dx \\ &= x \sin \log x - x \cos \log x + \int x (-\sin \log x) \frac{1}{x} dx \\ &= x \sin \log x - x \cos \log x - \int \sin \log x \, dx. \end{aligned}$$

よって,

$$2 \int \sin \log x \, dx = x \sin \log x - x \cos \log x.$$

つまり,

$$\int \sin \log x \, dx = \frac{x}{2} (\sin \log x - \cos \log x).$$

(3) 定石通り, $\sqrt{x^2 + 1} - x = t$ とおくと,

$$x = \frac{1 - t^2}{2t}, \quad dx = \frac{-t^2 - 1}{2t^2} dt.$$

また,

$$\sqrt{x^2 + 1} = x + t = \frac{1 - t^2}{2t} + t = \frac{1 + t^2}{2t}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}} &= \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{2t} \frac{1+t^2}{2t}} \frac{-t^2 - 1}{2t^2} dt = \int \frac{-2}{1 - t^2} dt = - \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt \\ &= -\log |1+t| + \log |1-t| = \log \left| \frac{1-t}{1+t} \right|. \end{aligned}$$

変数を元に戻して,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}} = \log \left| \frac{1+x-\sqrt{x^2+1}}{1-x+\sqrt{x^2+1}} \right|.$$

6.4 リーマン積分の定義を参考にして, 次の極限值を求めよ.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}} \right)$$

解説 区間 $[0, 1]$ 上の連続関数の積分は, 等分割 $\Delta : 0 < 1/n < 2/n < \cdots < n/n = 1$ と各小区間 $[(k-1)/n, k/n]$ から代表点を k/n として選ぶことで,

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

が成り立つ. これを級数の和を求める公式として用いるのが問題の趣旨である.

(1)

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right) \\
&= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \left[\log |1+x| \right]_0^1 = \log 2.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n}}} \right) \\
&= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \left[2\sqrt{1+x} \right]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2.
\end{aligned}$$

6.5 次の定積分を計算せよ.

$$(1) \int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} dx \quad (2) \int_0^1 \log(1+\sqrt{x}) dx \quad (3) \int_0^1 x(\arctan x)^2 dx$$

解説 (1)

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} dx$$

とおいて漸化式を作ろう. まず,

$$I_0 = 0, \quad I_1 = \pi \quad (6.5.1)$$

は明らかである. さらに,

$$I_2 = \int_0^\pi \frac{\sin 2x}{\sin x} dx = \int_0^\pi \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} dx = \int_0^\pi 2 \cos x dx = 0. \quad (6.5.2)$$

さて, $n \geq 3$ として, 三角関数の加法公式を繰り返し適用する.

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin nx}{\sin x} &= \frac{\sin(n-1)x \cos x + \cos(n-1)x \sin x}{\sin x} \\
 &= \frac{\sin(n-1)x}{\sin x} \cos x + \cos(n-1)x \\
 &= \frac{\sin(n-2)x \cos x + \cos(n-2)x \sin x}{\sin x} \cos x + \cos(n-1)x \\
 &= \frac{\sin(n-2)x}{\sin x} \cos^2 x + \cos(n-2)x \cos x + \cos(n-1)x \\
 &= \frac{\sin(n-2)x}{\sin x} (1 - \sin^2 x) + \cos(n-2)x \cos x + \cos(n-1)x \\
 &= \frac{\sin(n-2)x}{\sin x} - \sin(n-2)x \sin x + \cos(n-2)x \cos x + \cos(n-1)x \\
 &= \frac{\sin(n-2)x}{\sin x} + 2 \cos(n-1)x.
 \end{aligned}$$

よって,

$$I_n = \int_0^\pi \left(\frac{\sin(n-2)x}{\sin x} + 2 \cos(n-1)x \right) dx = I_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

初期条件 (6.5.1), (6.5.2) とあわせて

$$I_n = \begin{cases} 0 & n \text{ が偶数のとき,} \\ \pi & n \text{ が奇数のとき.} \end{cases}$$

(2) $t = \sqrt{x}$ とおくと, $t^2 = x$, $dx = 2t dt$ である. この変数変換と部分積分によって,

$$I = \int_0^1 \log(1 + \sqrt{x}) dx = \int_0^1 \log(1 + t) 2t dt = \left[t^2 \log(1 + t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{1 + t} dt.$$

よって,

$$\begin{aligned}
 I &= \log 2 - \int_0^1 \frac{t^2}{1 + t} dt = \log 2 - \int_0^1 \left(t - 1 + \frac{1}{1 + t} \right) dt \\
 &= \log 2 - \left[\frac{t^2}{2} - t + \log |1 + t| \right]_0^1 = \log 2 - \left(\frac{1}{2} - 1 + \log 2 \right) = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

(3) 部分積分によって,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 x (\arctan x)^2 dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} (\arctan x)^2 \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \times 2 \frac{\arctan x}{1 + x^2} dx \\
 &= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^2} \arctan x dx \\
 &= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \arctan x dx + \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} \arctan x dx.
 \end{aligned}$$

ここで,

$$I_1 = \int_0^1 \arctan x \, dx$$

であるが, $x = \tan \theta$ とおくと,

$$\arctan x = \theta, \quad dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta.$$

よって, 部分積分によって,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi/4} \frac{\theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \left[\theta \tan \theta \right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan \theta \, d\theta \\ &= \left[\theta \tan \theta \right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} + \left[\log |\cos \theta| \right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{\pi}{4} + \log \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

また,

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \arctan x \, dx$$

についても部分積分によって,

$$I_2 = \left[(\arctan x)^2 \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \arctan x \, dx = \frac{\pi^2}{16} - I_2.$$

よって,

$$I_2 = \frac{\pi^2}{32}.$$

したがって,

$$I = \frac{\pi^2}{32} - I_1 + I_2 = \frac{\pi^2}{32} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 \right) + \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log 2.$$

(注意) I_1 の計算は部分積分を用いてもよい.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \arctan x \, dx = \left[x \arctan x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2} \log(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2. \end{aligned}$$

6.6 次の積分を計算せよ.

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin x + \cos x} dx$$

解説 定石どおり,

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

とおけば,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

これらを用いて,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin x + \cos x} dx &= \int \frac{-t^2 + 2t + 1}{(t^2 + 1)(t + 1)} dt = \int \left(\frac{2}{t^2 + 1} - \frac{1}{t + 1} \right) dt \\ &= 2 \arctan t - \log |x + 1| = x - \log \left| \tan \frac{x}{2} + 1 \right|. \end{aligned}$$

したがって,

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin x + \cos x} dx = \left[x - \log \left| \tan \frac{x}{2} + 1 \right| \right]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3} - \log \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \right).$$

6.7 関数 $f(x)$ を次のように定義する.

$$f(x) = \arctan \frac{1-x}{1+x} + \arctan \frac{1+x}{1-x}$$

(1) $f'(x)$ を求めよ.

(2) 次の極限值を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(-1-x), \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x)$$

(3) $\int_0^2 x f(x) dx$ を計算せよ.

解説 (1) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ を用いた単純な計算である.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'}{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + 1} + \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{-(1+x)+(1-x)}{(1+x)^2}}{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + 1} + \frac{\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{-2}{(1-x)^2 + (1+x)^2} + \frac{2}{(1+x)^2 + (1-x)^2} = 0. \end{aligned}$$

(2) まず,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\arctan \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} + \arctan \frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x} - 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\arctan(-1) + \arctan(-1)) = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

次に,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(-1-x) = \lim_{x \rightarrow +0} \left(\arctan \frac{2+x}{-x} + \arctan \frac{-x}{2+x} \right) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \arctan t = -\frac{\pi}{2}.$$

最後に,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(\arctan \frac{1-x}{1+x} + \arctan \frac{1+x}{1-x} \right) = \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{2}.$$

(3) $f'(x) = 0$ であるから, $f(x)$ は $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$ のそれぞれの区間で定数である. 既に見たことから,

$$f(x) = \begin{cases} -\pi/2 & -\infty < x < -1, \\ \pi/2 & -1 < x < 1, \\ -\pi/2 & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

$f(x)$ は積分区間 $[0, 2]$ において 1 箇所不連続点があるので, その点で分ければよい.

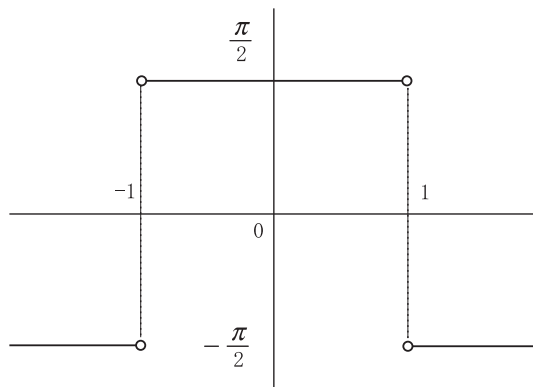


図 6.7.1: 問題 6.7

$$\int_0^2 x f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx + \int_1^2 x f(x) dx = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{\pi}{2}.$$

(注意) 上の積分で $f'(x) = 0$ だからといって, 部分積分を行い,

$$\int_0^2 x f(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} f(x) \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2}{2} f'(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} f(x) \right]_0^2$$

とするのは誤りである. (理由を考えよ.)

6.8 次の積分について問に答えよ.

$$I = \int_0^1 \sin(\log x) dx$$

- (1) I は広義積分であることを説明し, I の定義を記せ.
- (2) I の値を求めよ.

解説 (1) $\log x$ は $(0, 1]$ 上の連続関数ではあるが, $x = 0$ では定義されていない. さらに, $\lim_{x \rightarrow +0} \log(x) = -\infty$ のように発散するので, $\log x$ を $[0, 1]$ 上の連続関数にも拡張することはできない. よって, I は $[0, 1]$ 上の連続関数の積分とはゆかないため,

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^1 \sin(\log x) dx$$

のように定義される. これが広義積分である.

(2) 不定積分 $\int \sin(\log x) dx$ を求めることができる. 部分積分によって

$$\begin{aligned} \int \sin(\log x) dx &= x \sin(\log x) - \int x \{\sin(\log x)\}' dx \\ &= x \sin(\log x) - \int x \cos(\log x) \frac{1}{x} dx \\ &= x \sin(\log x) - \int \cos(\log x) dx \end{aligned} \quad (6.8.1)$$

最後の積分を部分積分すると,

$$\begin{aligned} \int \cos(\log x) dx &= x \cos(\log x) - \int x \{\cos(\log x)\}' dx \\ &= x \cos(\log x) - \int x \{-\sin(\log x)\} \frac{1}{x} dx \\ &= x \cos(\log x) + \int \sin(\log x) dx \end{aligned}$$

(6.8.1) に代入して,

$$\begin{aligned} \int \sin(\log x) dx &= x \sin(\log x) - \left(x \cos(\log x) + \int \sin(\log x) dx \right) \\ &= x \sin(\log x) - x \cos(\log x) - \int \sin(\log x) dx. \end{aligned}$$

よって,

$$\int \sin(\log x) dx = \frac{x}{2} \{\sin(\log x) - \cos(\log x)\}.$$

したがって,

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^1 \sin(\log x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\frac{x}{2} \{\sin(\log x) - \cos(\log x)\} \right]_{\epsilon}^1 \\ &= -\frac{1}{2} - \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\epsilon}{2} \{\sin(\log \epsilon) - \cos(\log \epsilon)\} \end{aligned} \quad (6.8.2)$$

ここで,

$$\left| \frac{\epsilon}{2} \{\sin(\log \epsilon) - \cos(\log \epsilon)\} \right| \leq \frac{\epsilon}{2} \{|\sin(\log \epsilon)| + |\cos(\log \epsilon)|\} \leq \epsilon$$

から,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\epsilon}{2} \{ \sin(\log \epsilon) - \cos(\log \epsilon) \} = 0.$$

よって, (6.8.2) は,

$$I = -\frac{1}{2}.$$

(別解) $t = \log x$ による置換を行う.

$$x = e^t, \quad dx = e^t dt$$

などから,

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^1 \sin(\log x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\log \epsilon}^0 (\sin t) e^t dt = \lim_{L \rightarrow -\infty} \int_L^0 e^t \sin t dt.$$

部分積分によって,

$$\begin{aligned} \int e^t \sin t dt &= e^t \sin t - \int e^t \cos t dt \\ &= e^t \sin t - \left(e^t \cos t - \int e^t (-\sin t) dt \right) \\ &= e^t \sin t - e^t \cos t - \int e^t \sin t dt. \end{aligned}$$

よって,

$$\int e^t \sin t dt = \frac{e^t}{2} (\sin t - \cos t).$$

したがって,

$$I = \lim_{L \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^t}{2} (\sin t - \cos t) \right]_L^0 = -\frac{1}{2}.$$

6.9 次の定積分を計算せよ.

$$(1) \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx \quad (2) \int_0^1 \log(1 + \sqrt{x}) dx \quad (3) \int_0^1 x(\arctan x)^2 dx$$

解説 (1)

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx$$

といて漸化式を作ろう. まず,

$$I_0 = 0, \quad I_1 = \pi \quad (6.9.1)$$

は明らかである. さらに,

$$I_2 = \int_0^{\pi} \frac{\sin 2x}{\sin x} dx = \int_0^{\pi} \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} dx = \int_0^{\pi} 2 \cos x dx = 0. \quad (6.9.2)$$

さて, $n \geq 3$ として, 三角関数の加法公式を繰り返し適用する.

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin nx}{\sin x} &= \frac{\sin(n-1)x \cos x + \cos(n-1)x \sin x}{\sin x} \\
 &= \frac{\sin(n-1)x}{\sin x} \cos x + \cos(n-1)x \\
 &= \frac{\sin(n-2)x \cos x + \cos(n-2)x \sin x}{\sin x} \cos x + \cos(n-1)x \\
 &= \frac{\sin(n-2)x}{\sin x} \cos^2 x + \cos(n-2)x \cos x + \cos(n-1)x \\
 &= \frac{\sin(n-2)x}{\sin x} (1 - \sin^2 x) + \cos(n-2)x \cos x + \cos(n-1)x \\
 &= \frac{\sin(n-2)x}{\sin x} - \sin(n-2)x \sin x + \cos(n-2)x \cos x + \cos(n-1)x \\
 &= \frac{\sin(n-2)x}{\sin x} + 2 \cos(n-1)x.
 \end{aligned}$$

よって,

$$I_n = \int_0^\pi \left(\frac{\sin(n-2)x}{\sin x} + 2 \cos(n-1)x \right) dx = I_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

初期条件 (6.9.1), (6.9.2) とあわせて

$$I_n = \begin{cases} 0 & n \text{ が偶数のとき,} \\ \pi & n \text{ が奇数のとき.} \end{cases}$$

(2) $t = \sqrt{x}$ とおくと, $t^2 = x$, $dx = 2t dt$ である. この変数変換と部分積分によって,

$$I = \int_0^1 \log(1 + \sqrt{x}) dx = \int_0^1 \log(1 + t) 2t dt = \left[t^2 \log(1 + t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{1 + t} dt.$$

よって,

$$\begin{aligned}
 I &= \log 2 - \int_0^1 \frac{t^2}{1 + t} dt = \log 2 - \int_0^1 \left(t - 1 + \frac{1}{1 + t} \right) dt \\
 &= \log 2 - \left[\frac{t^2}{2} - t + \log |1 + t| \right]_0^1 = \log 2 - \left(\frac{1}{2} - 1 + \log 2 \right) = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

(3) 部分積分によって,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 x (\arctan x)^2 dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} (\arctan x)^2 \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \times 2 \frac{\arctan x}{1 + x^2} dx \\
 &= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^2} \arctan x dx \\
 &= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \arctan x dx + \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} \arctan x dx.
 \end{aligned}$$

ここで,

$$I_1 = \int_0^1 \arctan x \, dx$$

であるが, $x = \tan \theta$ とおくと,

$$\arctan x = \theta, \quad dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta.$$

よって, 部分積分によって,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi/4} \frac{\theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \left[\theta \tan \theta \right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan \theta \, d\theta \\ &= \left[\theta \tan \theta \right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} + \left[\log |\cos \theta| \right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{\pi}{4} + \log \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

また,

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \arctan x \, dx$$

についても部分積分によって,

$$I_2 = \left[(\arctan x)^2 \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \arctan x \, dx = \frac{\pi^2}{16} - I_2.$$

よって,

$$I_2 = \frac{\pi^2}{32}.$$

したがって,

$$I = \frac{\pi^2}{32} - I_1 + I_2 = \frac{\pi^2}{32} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 \right) + \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log 2.$$

(注意) I_1 の計算は部分積分を用いてもよい.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \arctan x \, dx = \left[x \arctan x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2} \log(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2. \end{aligned}$$

6.10 次の積分について問に答えよ.

$$I = \int_0^1 \sin(\log x) \, dx$$

- (1) I は広義積分であることを説明し, I の定義を記せ.
- (2) I の値を求めよ.

解説 (1) $\log x$ は $(0, 1]$ 上の連続関数ではあるが, $x = 0$ では定義されていない. さらに, $\lim_{x \rightarrow +0} \log(x) = -\infty$ のように発散するので, $\log x$ を $[0, 1]$ 上の連続関数にも拡張することはできない. よって, I は $[0, 1]$ 上の連続関数の積分とはゆかないため,

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^1 \sin(\log x) dx$$

のように定義される. これが広義積分である.

(2) 不定積分 $\int \sin(\log x) dx$ を求めることができる. 部分積分によって

$$\begin{aligned} \int \sin(\log x) dx &= x \sin(\log x) - \int x \{\sin(\log x)\}' dx \\ &= x \sin(\log x) - \int x \cos(\log x) \frac{1}{x} dx \\ &= x \sin(\log x) - \int \cos(\log x) dx \end{aligned} \quad (6.10.1)$$

最後の積分を部分積分すると,

$$\begin{aligned} \int \cos(\log x) dx &= x \cos(\log x) - \int x \{\cos(\log x)\}' dx \\ &= x \cos(\log x) - \int x \{-\sin(\log x)\} \frac{1}{x} dx \\ &= x \cos(\log x) + \int \sin(\log x) dx \end{aligned}$$

(6.10.1) に代入して,

$$\begin{aligned} \int \sin(\log x) dx &= x \sin(\log x) - \left(x \cos(\log x) + \int \sin(\log x) dx \right) \\ &= x \sin(\log x) - x \cos(\log x) - \int \sin(\log x) dx. \end{aligned}$$

よって,

$$\int \sin(\log x) dx = \frac{x}{2} \{\sin(\log x) - \cos(\log x)\}.$$

したがって,

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^1 \sin(\log x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\frac{x}{2} \{\sin(\log x) - \cos(\log x)\} \right]_{\epsilon}^1 \\ &= -\frac{1}{2} - \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\epsilon}{2} \{\sin(\log \epsilon) - \cos(\log \epsilon)\} \end{aligned} \quad (6.10.2)$$

ここで,

$$\left| \frac{\epsilon}{2} \{\sin(\log \epsilon) - \cos(\log \epsilon)\} \right| \leq \frac{\epsilon}{2} \{|\sin(\log \epsilon)| + |\cos(\log \epsilon)|\} \leq \epsilon$$

から,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\epsilon}{2} \{ \sin(\log \epsilon) - \cos(\log \epsilon) \} = 0.$$

よって, (6.10.2) は,

$$I = -\frac{1}{2}.$$

(別解) $t = \log x$ による置換を行う.

$$x = e^t, \quad dx = e^t dt$$

などから,

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^1 \sin(\log x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\log \epsilon}^0 (\sin t) e^t dt = \lim_{L \rightarrow -\infty} \int_L^0 e^t \sin t dt.$$

部分積分によって,

$$\begin{aligned} \int e^t \sin t dt &= e^t \sin t - \int e^t \cos t dt \\ &= e^t \sin t - \left(e^t \cos t - \int e^t (-\sin t) dt \right) \\ &= e^t \sin t - e^t \cos t - \int e^t \sin t dt. \end{aligned}$$

よって,

$$\int e^t \sin t dt = \frac{e^t}{2} (\sin t - \cos t).$$

したがって,

$$I = \lim_{L \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^t}{2} (\sin t - \cos t) \right]_L^0 = -\frac{1}{2}.$$

6.11 曲線の長さについて説明し, t が $0 \leq t \leq \pi/2$ の範囲を動いてできる曲線 $(\cos^3 t, \sin^3 t)$ の長さを求めよ.

解説 曲線の長さについての説明は教科書を参照. $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ とおくと, 曲線の長さは

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt.$$

ここで,

$$\begin{aligned} (x')^2 + (y')^2 &= (3 \cos^2 t (-\sin t))^2 + (3 \sin^2 t \cos t)^2 = 9 \cos^4 t \sin^2 t + 9 \cos^2 t \sin^4 t \\ &= 9 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 + \sin^2 t) = 9 \cos^2 t \sin^2 t. \end{aligned}$$

よって,

$$L = \int_0^{\pi/2} 3 \cos t \sin t dt = \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = \frac{3}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}.$$

6.12 次の積分を計算せよ.

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x}{(x+1)(x^2+1)} dx$$

解説 被積分関数を部分分数展開する. 分子の次数が分母より大きいので割り算をして,

$$\frac{2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x}{(x+1)(x^2+1)} = 2x + \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}$$

次に, 分数部分は一般論によって,

$$\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

の形にできる. 両辺に $x+1$ をかけて $x=-1$ とおくと,

$$\frac{x^2}{x^2+1} \Big|_{x=-1} = A \quad \text{つまり} \quad A = \frac{1}{2}.$$

よって,

$$\frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} - \frac{1/2}{x+1} = \frac{\frac{1}{2}(x^2-1)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{\frac{1}{2}(x-1)}{x^2+1}$$

こうして,

$$\frac{2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x}{(x+1)(x^2+1)} = 2x + \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1}.$$

これを $-1/2$ から $1/2$ まで積分すればよい. 第1項と第3項は奇関数の積分なので値は0. したがって,

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x}{(x+1)(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{x^2+1}.$$

第1項は,

$$\frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{2} [\log(x+1)]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{2} \left(\log \frac{3}{2} - \log \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \log 3.$$

また, 第2項は,

$$\frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{x^2+1} dx = [\arctan x]_0^{1/2} = \arctan \frac{1}{2}.$$

よって,

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x}{(x+1)(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \log 3 - \arctan \frac{1}{2}.$$