

修士論文要旨

格子空間ダイナミクスにおける空間分布の特性を繰り込んだ
非標準的平均場近似モデルの考察

A non-standard mean-field approximation model involving the characteristics of spatial distribution
in the lattice space dynamics

松岡功

広島大学大学院理学研究科数理分子生命理学専攻

Tsutomu MATSUOKA

*Department of Mathematical and Life Sciences, Graduate School of Science
Hiroshima University, Kagamiyama 1-3-1, Higashi-hiroshima 739-8526 JAPAN*

Interaction such as predation and competition often occurs in a spatial scale much smaller than the scale of spatial population distribution. For some species which mobility is restricted in a specific spatial scale, the characteristics of the spatial population distribution significantly affect the dynamics of the average density over the whole habitat space. The lattice model or the cellular automaton model is useful for modeling such a spatially structured population dynamics. The lattice model is generally analyzed by using the computer simulation. The *mean-field approximation model* is used in order to analyze the dynamics of the average density over the whole space in the lattice model. However, it does not always give an appropriate approximation. Considering a specific predator-prey system on a two dimensional square lattice space, we develop and propose a *non-standard mean-field approximation model* involving the characteristics of spatial distribution. Our model gives a more appropriate approximation of the averaged prey density than the standard mean-field approximation model does. In some cases, the proposed non-standard approximation model is more appropriate than the pair approximation model, while our model has a simple structure as the mean-field approximation model.

捕食や競争などの個体間の相互作用は、対象とする個体群が分布する空間スケールよりもはるかに小さな空間スケールで生じることがしばしばである。殊に、移動が制限される生物の個体群動態の数値モデリングについては、その空間分布の特性が分布域全体にわたる平均個体群密度の動態に重要な寄与をもつ。この観点において、格子空間モデルやセルオートマトンモデルは、空間構造をもった個体群動態を記述するために有効な数値モデルと考えられる。それゆえ、樹木の成長モデルや宿主-寄生者モデル、捕食者-被食者モデルなどの様々な個体群動態に応用されている。格子空間モデルは、一般的に確率過程により記述されており、もっぱらコンピュータによる数値シミュレーションを用いて解析される。その数値データを理論的に理解する方法として、しばしば、全空間にわたる平均統計量の時間変動のみを差分方程式系あるいは微分方程式系により記述した標準的平均場近似モデル (standard mean-field approximation model) を解析した結果との対照が用いられる。しかしながら、空間分布の特性が個体群動態に本質的に重要な寄与を与える場合には、標準的平均場近似は、必ずしも格子空間モデルにおける全空間にわたる平均統計量の時間変化を適切に近似できるとは限らない。

本研究では、以下で述べる 2 次元格子空間上の捕食者-被食者系モデルを取り上げ、空間分布の特性を繰り込んだ非標準的な平均場近似の開発を試みることにより、格子空間モデルにおける全空間にわたる平均統計量の特性を理論的に理解するための新しい手法の可能性を探る。

Pascual ら [1] は、以下のように定義される 2 次元正方格子上の捕食者-被食者系格子空間モデルの特性、および、標準的平均場近似モデルを考察した：

- (1) 『被食者の増殖』各被食者は、微小時間 Δt あたり $\beta\Delta t$ の確率で、 n 個の最近接サイトからランダムに 1 つ選び、それが空のサイトであれば、そこに新たな被食者を生む。
- (2) 『捕食』各捕食者は、 n 個の最近接サイトに被食者が存在するサイトがあれば、ランダムにそのうちの 1 つを選び、微小時間 Δt あたり $\alpha\Delta t$ の確率でそこに移動して捕食する。
- (3) 『捕食者の増殖』捕食者が捕食を行った場合、 b の確率で元のサイトに新たな捕食者個体を生む。

- (4) 『捕食者の死亡』最近接サイトのいずれにも被食者が存在しない場合，捕食者は微小時間 Δt あたり $\delta\Delta t$ の確率で死亡する。
- (5) 『移動』隣接するサイトは微小時間 Δt あたり確率 $\nu\Delta t$ で状態を入れ替える。

この格子空間モデルに対する標準的平均場近似モデルは以下のように与えられる：

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_x}{dt} &= \beta\rho_x(1 - \rho_x - \rho_y) - \alpha\rho_y \{1 - (1 - \rho_x)^n\} \\ \frac{d\rho_y}{dt} &= b\alpha\rho_y \{1 - (1 - \rho_x)^n\} - \delta\rho_y(1 - \rho_x)^n\end{aligned}\quad (1)$$

ρ_x と ρ_y は，それぞれ，被食者と捕食者の全空間にわたる平均密度である。正方格子モデルの場合の最近接サイト数 n は $n = 4$ である。Pascual ら [1] は， $\nu = 1$ の場合について，標準的平均場近似モデル (1) における自然数 n を格子空間モデルの数値シミュレーションから得られるデータを用いて決定される実数パラメータ γ_m で置き換える改変型平均場近似を提示し，相当に小さな誤差の近似値を得ることに成功した。その改変型平均場近似は，捕食者および空のサイトの周りには均しく被食者が分布しているという直観的洞察に基づいていた。本研究では，上記の捕食者-被食者系格子空間モデルにおける個体の空間分布の特性をより詳細に調べ，Pascual ら [1] の手法によって得られる良精度の近似値の要因についての理論的な考察を行った結果，最近接サイトの状態配置に関する全空間にわたる平均密度との関係性によりその近似の適性を理論的に説明できることが判明した。

本研究では，Pascual ら [1] の手法と異なり，理論的に決定できる γ_N を n に代えて用いる新しい非標準的平均場近似モデル (non-standard mean-field approximation model) を提案し，他の近似モデルとの比較対照を行うことにより，新しい近似手法の可能性について検討した。この非標準的平均場近似モデルでは，(1) における n を，捕食者の近接サイトに存在する被食者以外のサイト数の期待値

$$\gamma_N = n(1 - q_{x/y}) = n \left(\frac{b}{b + \delta} \right)^{1/n}$$

で置き換えることにより与えられる ($q_{x/y}$ は捕食者の隣接サイトに被食者が存在する確率)。改変型平均場近似モデルにおける γ_m の値が格子空間モデルの数値シミュレーションから得られるデータ値を用いて定められるのに対し，非標準的平均場近似モデルにおける γ_N の値はパラメータ値によって一意的に定まることは大きな相違点である。

標準的平均場近似モデルに比べて，一般的に，より小さな誤差の近似値を与える近似モデルとしてペア近似モデル (pair approximation model) がある。これは，隣接するサイトのペアが取りうる状態の組み合わせについて，それらの全空間にわたる平均密度の時間変動を併せて記述するものである。格子空間モデルにおける全空間平均密度が定常状態に収束する場合でも，標準的平均場近似モデルおよびペア近似モデルでは，パラメータの値によっては収束しない。一方，非標準的平均場近似モデルでは，パラメータ値のより広い範囲で平均密度が収束し，被食者密度に関しては，十分に広いパラメータ値の範囲で標準的平均場近似モデルよりも誤差の小さい近似値を与える。また，ペア近似モデルよりも誤差の小さい近似値を与えるパラメータ値の範囲が存在することも示すことができた。個体の移動性が高い場合 (ν :大) には，改変型平均場近似モデルは，被食者密度については相当に小さい誤差の近似値を与えるが，個体の移動性が低い場合 (ν :小) には，近似値の誤差が相当に大きくなる。一方，非標準的平均場近似モデルは，移動性が低い場合においても，標準的平均場近似モデルよりも小さな誤差の近似値を与えることができる。本研究で論じた非標準的平均場近似モデルの考え方は，空間分布が個体群動態へ及ぼす影響に関する理論的研究における数理モデルについての新しい問題提起ができると期待される。

参考文献

- [1] Pascual, M., Roy, M. and Franc, A., 2002. Simple temporal models for ecological systems with complex spatial patterns. *Ecology Letters*, 5: 412-419.