修士論文要旨

入学試験倍率の年次変動ダイナミクスに関する数理モデルの研究

A mathematical model for the annual dynamics of the admission rate

内桶怜奈

東北大学大学院情報科学研究科 情報基礎科学専攻

Reina UCHIOKE

Department of Computer and Mathematical Sciences, Graduate School of Information Sciences
Tohoku University

進学における志望校選択は，受験生による意思決定の典型の一つである。今日，日本では受験産業が非常に発達し，受験生は，受験産業から提供される情報を重要な材料として，志望校を決定すると考えられる。本研究では，受験生の志望校選択に係る動態を理論的に考察するための数理モデリングを検討し，受験状況の年次変動ダイナミクスに関する基礎的な数理モデルを構築し，構築された数理モデルについての数理的な解析により，入学試験倍率の年次変動ダイナミクスに関する理論的な示唆，および，さらなる理論研究の課題の提示を試みた。

数理モデリングの仮定

- 受験対象者総数 (N) および学校 A の合格定員 (K_A) は，年度によらず一定である。受験対象者集団における学力分布は，標準偏差値分布 $N(50, 10)$ によって与えられる。
- 学校 A の受験者数が合格定員を超えない場合 (受験倍率が 1 以下の場合) には，受験者全員が合格する。
- 学校 A の受験者数が合格定員を超える場合 (受験倍率が 1 より大きい場合) であっても，合格定員増の操作は行わず，合格者数は必ず定員と等しい。
- 各年度において，学校 A の受験を選択する受験者の割合が最も大きくなる学力値 m_t は，前年度の学校 A の受験・入試状況からの影響を受けるという仮定の下，m_t を前年度の合格者学力平均値 $\langle z \rangle_{t-1}$ に等しいとする。

年次変動ダイナミクスモデル I

年次変動ダイナミクスモデル I は，受験者の学力順位のみによって合格者が決定される場合の数理モデルであり，センター試験の結果によって受験者集団の学力分布が定められるときに，その分布のみで入学の合否が決まる場合に対応している：

$$\overline{z}_{t+1} = (1 - S^2)\langle z \rangle_t + 50S^2 \tag{1}$$

$$\sigma^2_{t+1} = 10^2 S^2 \tag{2}$$

$$\langle z \rangle_{t+1} = \mathscr{F}(\langle z \rangle_t) = \begin{cases} \overline{z}_{t+1} & (p_{t+1} \le 1) \\ \overline{z}_{t+1} + 10SG(\omega_{t+1})p_{t+1} & (p_{t+1} > 1) \end{cases} \tag{3}$$

$$p_{t+1} = CS \exp\left[-\frac{1 - S^2}{2} \left(\frac{\langle z \rangle_t - 50}{10} \right)^2 \right] \tag{4}$$

$$\widehat{\sigma}^2_{t+1} = \begin{cases} \sigma^2_{t+1} & (p_{t+1} \le 1) \\ \sigma^2_{t+1} - (\langle z \rangle_{t+1} - \overline{z}_{t+1} - 10S\omega_{t+1})(\langle z \rangle_{t+1} - \overline{z}_{t+1}) & (p_{t+1} > 1) \end{cases} \tag{5}$$

$$V(\omega_{t+1}) = \frac{1}{p_{t+1}} \quad (p_{t+1} > 1) \tag{6}$$

ただし，$\overline{z}_t$ は学校 A の t 年度における受験者の学力平均値，σ^2_t は受験者の学力分散値，$\langle z \rangle_t$ は合格者の学力平均値，p_t は受験倍率，$\widehat{\sigma}^2_t$ は合格者の学力分散値，$G(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}$（ガウス関数），$V(x) := \int_x^\infty G(\xi)d\xi$ であり，C，S（$0 < S < 1$）は正値パラメータである。

数学的に取り扱い易くするために，関数 $V(\omega)$ を，同様の性質をもつ次の関数 $W(\omega)$ で置き換える：

$$W(\omega) := \frac{1}{2}\left\{ 1 - \tanh\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\omega \right) \right\} = \frac{1}{\mathrm{e}^{4\omega/\sqrt{2\pi}} + 1} \tag{7}$$

$W(\omega)$ と $V(\omega)$ の関数値の差は十分に小さく，$V(\omega)$ の $W(\omega)$ への置き換えは，数理モデリングの合理性を損なうものとは考えられず，この置き換えによって構築される以下の数理モデルによる年次変動ダイナミクスの特性が，式 (1)〜(6) が定める系の特性と本質的に異なる可能性は小さいと考えられる。関数 W の導入により，式 (6) における ω_{t+1} は，次式によって置き換えられる：

$$\omega_{t+1} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \ln\left(p_{t+1} - 1\right) \tag{8}$$

この結果，式 (1)，(2)，(4) と以下の式から成る次の年次変動ダイナミクスモデルが得られる：

$$\langle z \rangle_{t+1} = \mathscr{F}(\langle z \rangle_t) = \begin{cases} \overline{z}_{t+1} & (p_{t+1} \leq 1) \\ \overline{z}_{t+1} + \dfrac{10S}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{\pi}{16}\{\ln(p_{t+1}-1)\}^2\right] p_{t+1} & (p_{t+1} > 1) \end{cases} \tag{9}$$

$$\widehat{\sigma}^2_{t+1} = \begin{cases} \sigma^2_{t+1} & (p_{t+1} \leq 1) \\ \sigma^2_{t+1} - \left(\langle z \rangle_{t+1} - \overline{z}_{t+1} - 10S\dfrac{\sqrt{2\pi}}{4}\ln(p_{t+1}-1)\right)(\langle z \rangle_{t+1} - \overline{z}_{t+1}) & (p_{t+1} > 1) \end{cases} \tag{10}$$

年次変動ダイナミクスモデル II

年次変動ダイナミクスモデル II は，受験者の学力が高いほど合格しやすいが，どんな学力の受験者も不合格になる可能性がある場合の数理モデルであり，合否が受験者の学力順位のみでは決まらず，別途課された入学試験の成績が，合否の決定因子として用いられる場合に対応している：

$$\begin{aligned} \langle z \rangle_{t+1} &= 10S \max\{1, p_{t+1}\} \int_{-\infty}^{\infty} x \lambda_{t+1}^{V(x)} G(x) dx + (1 - S^2)\langle z \rangle_t + 50S^2 \\ p_{t+1} &= CS \exp\left[-\frac{1-S^2}{2}\left(\frac{\langle z \rangle_t - 50}{10}\right)^2\right] \end{aligned}$$

ただし，λ_{t+1} は，次の λ についての方程式の最も小さな正の実根として定める：

$$\ln\lambda + (1-\lambda)\max\{1, p_{t+1}\} = 0$$

年次変動ダイナミクスモデル I の解析結果

$CS \leq 1$ ならば，平衡点 $(\langle z \rangle^*, p^*) = (50, CS)$ のみが存在し，系は $t > 1$ において，この平衡点に単調に漸近していくことが示された。$CS > 1$ ならば，$p^* > 1$ なる平衡点のみが存在し，数値計算により，十分に大きな $t > 0$ に対して，唯一の平衡点に単調に漸近する結果が得られた。

受験者学力平均値の平衡値 $\overline{z}^*$ や合格者学力平均値の平衡値 $\langle z \rangle^*$ が極大となる特別なパラメータ S の値が現れ得ることもわかった。$\overline{z}^*$ は，相対的に小さなある S の値に対して，必ず極大となる。$\langle z \rangle^*$ については，C の値が十分に大きな場合に限って，S のある特別な値において極大が現れることが数値計算によって示された。

考察

年次変動ダイナミクスモデル I については，受験倍率や合格者学力平均値が，ある平衡値に漸近することが示された。また，受験者学力平均値，合格者学力平均値の平衡値が極大値をもつ条件の存在も示された。受験者学力平均値の平衡値が極大値をとる条件と合格者学力平均値の平衡値が極大値をとる条件は一致しない。この結果は，学校教育の質を高める上で，合格者学力平均値が高い方が望ましいという見地に立てば，それを実現する上で，受験者学力平均値をより高くすることが，必ずしも適切な選択肢とは言えない可能性を示唆していると考えることもできる。

年次変動ダイナミクスモデル II の解析については未着手の課題となった。モデル I とモデル II の特性の違いを数理的に検討することにより，隔年変動などの異なる動的振る舞いの出現可能性も含めて，受験倍率の年次変動の特性についての理論的考察の進展を期待できる。