過去の感染規模が現在の予防水準に及ぼす影響を考慮した感染規模年変動の数理モデル

瀬野 裕美 (東北大学)[*1]
寺田 恵華 (広島大学)
井上 美香 (広島大学)

インフルエンザをはじめとする感染症の流行には，大流行と小流行を繰り返す様相が見られる。これには，前年以前の流行により，社会的に促される様々な予防対策が感染症流行を抑制する効果も働いている可能性があるのではないだろうか。本研究では，感染症流行の年変動についてのこの可能性に関する理論的な考察を行うために，前年以前の感染規模（感染症罹患者総数）が感染症伝染ダイナミクスに及ぼす影響を導入した基本的な数理モデルの解析を行った。本発表では，その結果の一部を紹介する。

毎年の感染シーズンにおける感染症伝染ダイナミクスは，最も基本的な Kermack–McKendrick 型 SIR モデルで記述できるとする。感染シーズン中における総個体群サイズの変動は無視する。この SIR モデルについて，感染シーズン終了時の免疫獲得者個体群サイズで定義される感染規模 $R_\infty = \lim_{t\to\infty} R(t)$ を与える極限方程式はよく知られている。その極限方程式を拡張し，前年以前の感染規模が予防水準に及ぼす影響を考慮した感染規模年変動ダイナミクスを支配する次の数理モデルを考察した：

$$z_k = 1 - \exp\left[-\frac{N_k}{f(z_{k-1}, z_{k-2}, \ldots, z_0)} z_k\right]$$

z_k は k 年目のシーズンにおける総個体群サイズ N_k に対する相対感染規模（$= R_\infty/N_k$）を表す（$0 \le z_k \le 1$）。$f(z_{k-1}, z_{k-2}, \ldots, z_0)$ を k 年目における予防水準関数と呼ぶ。予防水準関数 $f(z_{k-1}, z_{k-2}, \ldots, z_0)$ は，任意の引数 $z_i \in [0,1]$（$i = 0, 1, \ldots, k-1$）について非減少な正値関数とする：$f(z_{k-1}, z_{k-2}, \ldots, z_0) > 0$ かつ $\partial f(z_{k-1}, z_{k-2}, \ldots, z_0)/\partial z_i \ge 0$。定まった $z_{k-1}, z_{k-1}, \ldots, z_0$ に対するこの方程式の解 z_k について，$f(\cdot) \ge N_k$ ならば，$z_k = 0$ (常に存在する自明解) とし，$f(\cdot) < N_k$ ならば，上式を満たす $z_k > 0$ (非自明解) とする。上式は，$z_{k-1}, z_{k-2}, \ldots, z_0$，$N_k$ に対して，唯一の非負なる z_k を定める離散力学系となっている。相対感染規模 $z_k = 0$ は，k 年目の感染シーズンに感染症流行が起こらなかった場合を表す。本発表では，特に，予防水準が過去の感染規模に指数関数的に依存する場合,

$$f(z_{k-1}, z_{k-2}, \ldots, z_0) = f_0 \exp\left[\alpha\left(z_{k-1} + \sigma z_{k-2} + \sigma^2 z_{k-3} + \cdots \quad + \sigma^{k-1} z_0\right)\right]$$

で与えられる場合を考える。α は予防水準の過去の感染規模による変化係数である。パラメータ α の大きさは，過去の感染規模が大きいときほど，手厚く予防措置を行うが，過去の感染規模が小さいときほど，予防措置があまり行われないという，個体群を成す個体のふるまいの特性を反映している。パラメータ $\sigma \in [0,1]$ は，過去の感染規模に対する社会的な記憶/忘却の程度を表す。

キーワード：数理モデル，数理生物学，応用数理，差分方程式
[*1] 〒980-8526 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6-3-09 東北大学大学院情報科学研究科
e-mail: seno@math.is.tohoku.ac.jp