2000 年 2 月

$\boxed{1}$

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす 2×2 行列 A をすべて求めよ.

(2) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を満たす 2×2 行列 A が存在しないことを示せ.

(3) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす 3×3 行列 B で $(3,1)$ 成分 (つまり 3 行 1 列成分) が 0 であるものをすべて求めよ.

$\boxed{2}$

二回連続偏微分可能な関数 $f(x,y)$ について、以下の問に答えよ。

（１）$f(x,y)$ を $(x,y) = (x_0, y_0)$ の回りで、二次の項までテーラー展開せよ。

（２）$f(x,y)$ が $(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)) = (0,0)$ を満たすとき、

$$(x - x_0, y - y_0) \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

が $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ なる任意の (x,y) について正ならば $f(x_0,y_0)$ は極小値となり、負ならば $f(x_0,y_0)$ は極大値となることを示せ。

（３）$f(x,y) = x^2 + 5y^2 + x^2y + 2y^3$ の極値を調べよ。

$\boxed{3}$

(1) 3 次元空間 $\boldsymbol{R}^3$ に n 個の点 $P_1, ..., P_n$ を定め、空間を n 個の部分集合 $V_1, ..., V_n$ に分ける。ただし、空間の点 P が V_i に属する必要十分条件は、

P とこれらの点を結ぶ線分の長さ $PP_1,\ PP_2, ...,\ PP_n$ の最小値が PP_i である

こととする。最小値が二つ以上あるときには、対応するすべての V_i に属するものとする。このとき、各 V_i は凸集合である、即ち、点 A, B が V_i に属するとき、線分 AB のすべての点が V_i に属することを証明せよ。

(2) 平面上に n 個の点があるとき、同様にして平面を n 個の閉領域に分けることができる。平面上に、同一直線上にはない 3 点 P_1, P_2, P_3 があるとき、閉領域 V_1, V_2, V_3 は一点を始点とする 3 本の半直線によって区切られることを示せ。この一点はどのような点か。

(3) 平面上に (2) の 3 点と異なる点 P_4 を付け加えて、同じやり方で 4 領域に分ける。このとき P_4 の属する領域が有界である必要十分条件は P_4 が三角形 $P_1P_2P_3$ の内部にあることであることを証明せよ。

$\boxed{4}$

p を素数，n を自然数，$q = p^n$ とし，$\mathbb{F}_q$ で q 個の元から成る有限体，$\mathbb{F}_q[X]$ で $\mathbb{F}_q$ 係数の多項式全体の成す環を表し，$f(X) = X^3 + X + 1$ とおく．また，$h(X) \in \mathbb{F}_q[X]$ に対して $(h(X))$ で $\mathbb{F}_q[X]$ における $h(X)$ の生成するイデアルを表すことにする．
このとき次の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{F}_2[X]/(f(X)) \simeq \mathbb{F}_8$ となることを示せ．

(2) $f(X) = 0$ の $\mathbb{F}_8$ 上の根の一つを α とするとき，残りの根を α を用いて表せ．

(3) 3 次の多項式 $g(X)$ で，$\mathbb{F}_2[X]/(g(X)) \simeq \mathbb{F}_8$ となる $g(X) \in \mathbb{F}_2[X]$ は，$f(X)$ の他にいくつあるか．すべて求めよ．

(4) より一般に，$\mathbb{F}_q$ の 3 次拡大体 $\mathbb{F}_{q^3}$ に対して $\mathbb{F}_q[X]/(h(X)) \simeq \mathbb{F}_{q^3}$ となる 3 次の既約多項式 $h(X) \in \mathbb{F}_q[X]$ はいくつあるか．その個数を求めよ．

$\boxed{5}$

G を有限群, X を有限集合とし, G は X に作用しているとする。
即ち, $g \in G,\ x \in X$ に対して $g * x \in X$ が定まり,

$$h * (g * x) = (hg) * x,\ e * x = x \quad (e \text{ は } G \text{ の単位元})$$

が成り立つとする。

$x \in X$ に対して x を固定する G の部分集合を

$$G_x = \{g \in G |\ g * x = x\}$$

とおき, G の作用による x の像の全体を

$$G * x = \{g * x |\ g \in G\}$$

とおく。 $G * x$ を G-軌道という。

$g \in G$ に対して g が固定する X の要素、即ち $g * x = x$ となる $x \in X$ の個数を $\chi(g)$ とおく。

有限集合 Y に対して $|Y|$ は Y の要素の個数を表すとする。
以下の問いに答えよ。

(1) $x \in X$ に対して G_x は G の部分群であることを示せ。

(2) 剰余類集合 G/G_x について

$$|G/G_x| = |G * x|$$

が成り立つことを示せ。

(3) 異なる G-軌道の個数は

$$\frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |G_x|$$

に等しいことを示せ。

(4) G の作用が推移的 (即ち, 任意の $x, x' \in X$ に対し, $g * x = x'$ となる $g \in G$ が存在する) であるとき,

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = |G|$$

が成り立つことを示せ。

$\boxed{6}$

(1)　2 次元球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in R^3 \,|\, x^2+y^2+z^2=1\}$ から 1 点を取り除いた部分は、2 次元ユークリッド空間 R^2 と同相であることを示せ。

(2)　2 次元球面 S^2 は、2 つの開集合による開被覆によって多様体になることを示せ。

$\boxed{7}$

平面内の領域 D 上で定義された 3 次元ユークリッド空間内の曲面

$$\mathbf{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

の第 1 基本形式を

$$ds^2 = Edudu + 2Fdudv + Gdvdv$$

とする。ここで $w = x+iy$ （ただし $i=\sqrt{-1}$) とし、

$$\varphi_1(w) = \frac{\partial x}{\partial u} - i\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \varphi_2(w) = \frac{\partial y}{\partial u} - i\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \varphi_3(w) = \frac{\partial z}{\partial u} - i\frac{\partial z}{\partial v}$$

とおく。このとき、

(1)　φ_i $(i=1,2,3)$ が w について正則関数である必要十分条件は x, y, z が (u,v) の調和関数であることを示せ。

(2)　等式　${\varphi_1}^2 + {\varphi_2}^2 + {\varphi_3}^2 = E - G - 2iF$ が成り立つことを示せ。

(3)　x, y, z が調和関数であり、$E=G$ かつ $F=0$ が成り立つとする。

$$f = \varphi_1 - i\varphi_2, \qquad g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\,\varphi_2}$$

とおくと、f は正則関数で、g は有理型関数（正則関数の商）となり、さらに次式が成立することを示せ。

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}f(1-g^2), \quad \varphi_2 = \frac{i}{2}f(1+g^2), \quad \varphi_3 = fg.$$

$\boxed{8}$

$\mathbf{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対して

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$$

と置く．$\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^2$ への線形写像 f に対して

$$\|f(\boldsymbol{x})\| \leq M\|\boldsymbol{x}\| \qquad (\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2\,)$$

となる定数 M が存在するが，このような M の下限を $\|f\|$ と書く．

(1)　$\|f(\boldsymbol{x})\| \leq \|f\|\|\boldsymbol{x}\| \quad (\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2\,)$ を示せ．

(2)　$\|f\| = \sup\limits_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|f(\boldsymbol{x})\|$ を示せ．

(3)　線形写像 f で $\mathbf{R}^2$ のベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ が，それぞれ $\mathbf{R}^2$ のベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix}$ にうつるとき，$\|f\|$ の値を計算せよ．

$\boxed{9}$

$f(x) = \dfrac{1}{e^{x/2} + e^{-x/2}}$ とする．

(1) $f(x)$ が $\dfrac{1}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}$ の Fourier 変換，すなわち

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}\, dt$$

を示せ．

(2) $a, b > 0$ に対し

$$\frac{\sqrt{ab}}{a+b} = f(\log a - \log b)$$

を示せ．

(3) $a_1, \ldots, a_n > 0$ のとき，(j,k)-成分が $\sqrt{\dfrac{a_j a_k}{a_j + a_k}}$ である $n \times n$ 行列が半正定値であることを証明せよ．（ただし，$n \times n$ 行列 $A = (a_{jk})_{i,j=1}^{n}$ が半正定値とは，すべての複素数 $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ に対し $\sum\limits_{j,k=1}^{n} a_{jk}\zeta_j\overline{\zeta}_k \geq 0$ となるときをいう．）

$\boxed{10}$

(x, y) 平面で、次の連立方程式を考える。

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin y \\ \dot{y} = xy - x^3 \end{cases}$$

(1)　平衡点（不動点、特異点などともいう）をすべて求めよ。

(2)　そのうち、正方領域 $(-4, 4) \times (-4, 4)$ 内にある各平衡点の近くにおいて、解軌道の概略を描け。

$\boxed{11}$

$[0, +\infty)$ 上の関数 ϕ を

$$\phi(x) = \begin{cases} x^2 & (0 \le x < 1) \\ 1 & (1 \le x < 2) \\ x - 1 & (2 \le x < 3) \\ 5/2 & (x = 3) \\ \sqrt{3x} & (3 < x < +\infty) \end{cases}$$

で定義し、$[0, +\infty)$ 上の関数 ψ を

$$\psi(y) = \inf\{x \mid \phi(x) > y\}$$

で定義する。

(1) $\psi(1)$、$\psi(1-0) = \lim_{y<1,\, y\to 1} \psi(y)$、 および、 $2 < y < 3$ における ψ の値 $\psi(y)$ を求めよ。

(2) 関数 ψ のグラフの概略を描け。

(3) どのような $a,\ b > 0$ に対して

$$\int_0^a \phi(x)dx + \int_0^b \psi(y)dy = ab$$

となるか答えよ。