2000 年 9 月

1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 行列 A の固有値を求めよ。

(2) 行列 A の正規化された固有ベクトルを α を用いて表せ。

(3) 行列 A を対角化する正則行列 P、つまり、PAP^{-1} が対角行列となるような P を α を用いて書け。

(4) $a_0 = a_1 = 1$ とし、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

で数列 $\{a_n\}$ を定める。このとき次の問いに答えよ。

(i) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を α を用いて表せ。

(ii) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 2×2 実対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ を考える。任意の 2 次元ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ に対し　内積 $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ のとき、 A は半正定値といい、$A \geq 0$ と書く。また、２つの 2×2 実対称行列 A, B に対し $A - B \geq 0$ のとき、$A \geq B$ と書く。

(1) $A \geq 0$であるための必要十分条件が

$$a, b \geq 0 \quad \text{かつ} \quad ab \geq c^2$$

であることを示せ。

(2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。$A \geq P$ かつ $A \geq Q$ であるための条件を求めよ。

(3) $A \geq P$ かつ $A \geq Q$ を満たす 2×2 実対称行列 A の集合は、順序 $A \geq B$ に関する最小元をもつか？　つまり 2 元からなる集合 $\{P, Q\}$ の上限は存在するか？　存在するときはそれを求め、存在しないときはそのことを示せ。

$\boxed{3}$ 実数全体 $\mathbf{R}$ で定義された関数 $f(x)$ が C^2- 関数（２回微分可能で第２階導関数が連続）とする。このとき $x \neq y$ に対し、２変数関数 $g(x, y), h(x, y)$ を

$$g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, \quad h(x, y) = \frac{f(x) + f(y) - 2f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)}{(x-y)^2}$$

で定める。

(1) 任意の実数 ξ に対して $\displaystyle\lim_{x \to \xi, y \to \xi} g(x, y)$ 　を求めよ。

(2) 任意の実数 ξ に対して $\displaystyle\lim_{x \to \xi, y \to \xi} h(x, y)$ 　を求めよ。

(3) 任意の実数 ξ について $x = y = \xi$ のときの関数 g の値 $g(\xi, \xi)$ を $\displaystyle\lim_{x \to \xi, y \to \xi} g(x, y)$ として g の定義域を平面 $\mathbf{R}^2$ へ拡張するとき、g は平面 $\mathbf{R}^2$ 上で C^1- 関数（１回偏微分可能ですべての第１階偏導関数が連続）となることを証明せよ。

(4) 任意の実数 ξ について $x = y = \xi$ のときの関数 h の値 $h(\xi, \xi)$ を $\displaystyle\lim_{x \to \xi, y \to \xi} h(x, y)$ として h の定義域を平面 $\mathbf{R}^2$ へ拡張するとき、h は平面 $\mathbf{R}^2$ 上で連続関数となることを証明せよ。

$\boxed{4}$

三角多項式 $g(x) = \sum_k b_k e^{-ikx}$ について、次に答えよ。

(1) すべての x において $g(x) + g(x+\pi) = 1$ が成立するときの、偶数番目の係数 $b_0, b_{\pm 2}, b_{\pm 4}, \ldots$ を求めよ。

(2) 実数 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ により g が

$$g(x) = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k e^{-ikx} \right|^2$$

で与えられるとき、

$$b_n,\ b_{n-1} \quad \text{および} \quad b_0$$

を $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ を用いて表せ。

(3) 実数 a_0, a_1, a_2 を用いて定義される $g(x) = |a_0 + a_1 e^{-ix} + a_2 e^{-i2x}|^2$ が

$$g(0) = 1, \qquad g(x) + g(x+\pi) = 1 \quad (-\pi \le x < \pi)$$

を満たすような一組の a_0, a_1, a_2 を求めよ。

2000.9

$\boxed{5}$

関数 $f(x)$ は $\mathbf{R}^n$ 上定義された実数値、有界、リプシッツ連続関数とする。すなわち、ある定数 $C_0, C_1 > 0$ が存在して、

$$|f(x)| < C_0, \quad |f(x) - f(y)| \leq C_1 |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n.$$

また、関数 $b(x)$ は $\mathbf{R}^n$ 上定義され、$\mathbf{R}^n$ に値をとる有界な一回連続微分可能な関数とする。このとき、任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対して常微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = b(x(t)) \qquad t \geq 0,$$

$$x(0) = x$$

を解き、関数 $u(x,t)$ $(x \in \mathbf{R}^n, \quad t \geq 0)$ を

$$u(x,t) = \int_0^t e^{-s} f(x(s)) ds \qquad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \geq 0$$

で定義する。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 任意の $x \in \mathbf{R}^n$ と $0 \leq \tau \leq t$ をみたす任意 の τ について

$$u(x,t) = \int_0^\tau e^{-s} f(x(s)) ds + e^{-\tau} u(x(\tau), t - \tau)$$

が成り立つことを示せ。ただし $x(\cdot)$ は $x(0) = x$ を初期条件とする上の常微分方程式の解である。

(2) $u(x,t)$ が偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + u(x,t) - (b(x), \nabla u(x,t)) - f(x) = 0 \qquad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

$$u(x,0) = 0 \qquad x \in \mathbf{R}^n$$

の解であることを証明せよ。
ただし $(b(x), \nabla u(x,t))$ は内積を表し、$\nabla u(x,t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ である。

6

(1) Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の点列 $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ が正規直交系であることの定義を述べよ。

(2) $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の正規直交系とする。任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(\phi_n, x)|^2 \leq ||x||^2$$

を示せ。

(3) Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が点 $x_0 \in \mathcal{H}$ に弱収束すること、および強収束することの定義をそれぞれ述べよ。

(4) Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の正規直交系 $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は弱収束あるいは強収束するか。

7

(1) X, Y を位相空間とし、f を X から Y への連続写像とする。このとき、X のコンパクト集合 X_0 の像 $f(X_0)$ は Y のコンパクト集合であることを示せ。

(2) X をコンパクト距離空間、Y を距離空間とする。X から Y への連続写像 f は一様連続であることを示せ。

$\boxed{8}$

m を 正整数, $\mathbf{Z}$ を整数全体, $R = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ を法 m による剰余環とし, R に成分をもつ 2 次正方行列全体のなす環を

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in R \right\}$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) M の元 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が M に逆元をもつための条件は, $ad - bc$ が R に逆元をもつことであることを示せ。

(2) 逆元をもつ M の元の全体

$$M^\times = \{x \in M \mid xy = 1 \quad (\exists y \in M)\}$$

は群になることを示せ。

(3) m が素数のとき, (2) の群 $M^\times$ の位数を求めよ。

(4) m が素数 p のべき $m = p^k$ のとき, (2) の群 $M^\times$ の位数を求めよ。

$\boxed{9}$

$f(x) = x^3 - 2000$ とし、$f(x)$ の有理数体 $\mathbf{Q}$ 上の最小分解体を L、その $\mathbf{Q}$ 上のガロア群を G とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。

(2) $L = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3})$ であることを示せ。

(3) G の元で $\sqrt{-3}$ を固定する非自明な元（恒等写像でない元）の一つを σ とするとき、σ によって生成される群 N は G の位数 3 の正規部分群であることを示せ。

(4) G の元で $\sqrt[3]{2}$ を固定する非自明な元を τ とし、τ によって生成される G の部分群を H とする。このとき、問 (3) の σ を具体的に一つ固定することによって、G の部分群と L の部分体の間のガロア対応を図示せよ。

$\boxed{10}$

２次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^2$ と複素平面 $\mathbf{C}$ とを同一視し、１次元のサークルを $S^1 = \{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\}$ とする。$\mathbf{C}$ 上のベクトル場 X を次のように与える：

$\mathbf{C}$ 上の任意の点 z において、$X(z)$ は z を始点、$z + \sqrt{-1}z$ を終点とするベクトルである。

このとき、次の問いに答えよ。

(1) このベクトル場 X は S^1 で長さが１の接ベクトル場であることを示せ。

(2) $\mathbf{R}^2$ 内の t をパラメータとする曲線 $C(t) = (x(t), y(t))$ を

$$C(t) = (x(t), y(t)) = (xe^t \cos t - ye^t \sin t, xe^t \sin t + ye^t \cos t)$$

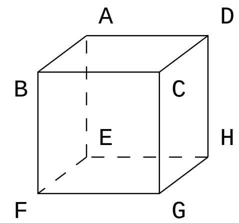
により与える。このとき $t = 0$ における曲線 $C(t)$ の接ベクトルを求めよ。

(3) $z = (x, y) = x + \sqrt{-1}y$ とするとき、$t = 0$ における曲線 $C(t)$ の接ベクトルと $X(z)$ との関係を調べよ。

$\boxed{11}$

中身のつまった６面体 $ABCD - EFGH$ から以下の同一視を行って得られる空間を M とする。

·面 $ABCD = EFGH$
·面 $ABFE = DCGH$
·面 $ADHE = BCGF$



(1) M が３次元多様体になることを示せ。

(2) M の基本群を求めよ。