2001 年 3 月

$\boxed{1}$ 以下に述べる主張について，正しいか正しくないか判定し，正しいときは証明を与え，正しくないときは反例を与えよ．

(1) 実数列 $\{a_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たすならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ は収束する．

(2) $\mathbf{R}$ 上で一様連続な実数値関数 $f(x)$ に対し，$\alpha, \beta > 0$ が存在して

$$|f(x)| \leq \alpha|x| + \beta(\forall x \in \mathbf{R}).$$

(3) $[0,1]$ 上で微分可能な関数列 $\{f_n\}$ が
$f_n(0) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ かつ $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = 0$ $(\forall x \in [0,1])$ ならば,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad (\forall x \in [0,1]).$$

$\boxed{2}$ a を -1 でない実数とし、

$$A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+1 \\ a+1 & a & a+1 \\ a+1 & a+1 & a \end{pmatrix}$$

とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 行列 A の固有値を求めよ。

(2) 行列 A のそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ。

(3) 行列 A は対角化可能か。可能ならば実際に対角化し、不可能ならばその理由を述べよ。

$\boxed{3}$ 素数 p を定める。

(1) p で割りきれない整数 a をとる。

$$1 \cdot a,\ 2 \cdot a, \cdots,\ (p-1) \cdot a$$

のそれぞれを p で割った余りは互いに異なることを示せ。
また、a^{p-1} を p で割った余りは 1 に等しいことを示せ。

(2) 2 つの整数 c, d に対して、cd を $p-1$ で割った余りが 1 とする。
$a_1, a_2, ..., a_n$ はどれも p より小さい正の整数とする。

$$b_i = (a_1 a_2 \cdots a_i)^c \text{ を } p \text{ で割った余り },\ i = 1, 2, ..., n$$

とする。b_1^d を p で割った余りは a_1 に等しいことを示せ。
また、$p, d, b_1, b_2, ..., b_n$ から $a_2, ..., a_n$ の値を求める方法を述べよ。

(3) $p = 11,\ c = 7$ とする。(2) の性質を満たす d を $1 \leq d \leq 9$ の範囲で求めよ。
$0 \leq A_i \leq 8\ (1 \leq i \leq 6)$ である整数 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ に対して、
$a_i = A_i + 2$ とする。 これらの a_i から (2) の方法で得られる数列が、

$$\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\} = \{5, 2, 3, 5, 4, 8\}$$

であるとき、数列 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 以下の問に答えよ。

(1) 複素関数 $f(z) = e^{iz}/z$ を二つの上半円 $A = \{z \mid z = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$,
$B = \{z \mid z = re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$, $0 < r < R < \infty$, 上で考えることにより、等式

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

を示せ。

(2) 複素関数 $f(z) = 1/(z^4 + 1)$ を上半円上で考えることにより、等式

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

を示せ。

$\boxed{5}$ 区間 $[0,1]$ 上に Lebesgue 測度を考え、$[0,1]$ 上の複素数値 2 乗可積分関数のつくる Hilbert 空間を $L^2[0,1]$ とする。$f \in L^2[0,1]$ に対し

$$(Af)(x) := \int_0^x f(t)\,dt \qquad (x \in [0,1])$$

と定める。

(1) A が $L^2[0,1]$ 上の有界線形作用素であることを示せ。

(2) A の共役作用素 A^* を求めよ。

(3) $A + A^*$ はどのような作用素か？

(4) $\|(I+A)f\| \geq \|f\|$ を示せ。（I は $L^2[0,1]$ 上の恒等作用素。）

(5) A が固有値をもたないこと、すなわち、どのような $\lambda \in \mathbf{C}$ に対しても、

$$Af = \lambda f \text{ を満たす } f \in L^2[0,1] \text{ は } f = 0 \text{ に限る}$$

ことを示せ。

$\boxed{6}$ 一変数関数 f の次の積分公式 $(*)$ について以下の問に答えよ。

$$(*) \qquad\qquad \int_0^1 f'(x)dx \;=\; f(1) - f(0).$$

(1) f を $[0,1]$ 上いたるところで微分可能であって f' が有界であるとする。この時、$(*)$ が成立することを示せ。(ヒント： $g_\varepsilon(x) \equiv (f(x+\varepsilon) - f(x))/\varepsilon, \varepsilon > 0,$ を考える。ルベーグの収束定理と平均値の定理は使ってもよい。)

(2) 区間 $[0,1]$ 上の関数 f を次のように定める。まず、$x \in (0,1)$ に対して、それを 3 進法で展開したときの小数 j 位の数を $a_j(x)$ と書く。つまり $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(x)/3^j$ 。そして、

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f(x) &= \sum_{j=1}^{b(x)} \chi(a_j(x))/2^j \quad (0 < x < 1), \\ f(1) &= 1, \end{aligned}$$

と定める。ここで、 χ は $\chi(0) = 0, \chi(1) = 1, \chi(2) = 1,$ であって

$$b(x) = \min\{j \mid a_j(x) = 1\}.$$

ただし、$\{j | a_j(x) = 1\} = \emptyset$ の場合は $\min\{j \mid a_j(x) = 1\} = \infty$ とする。

(i) f のおおよそのグラフを描け。

(ii) f は単調増加連続関数で、 ほとんどいたるところ $f' = 0$ であることを示せ。

$\boxed{7}$ n 次元ユークリッド空間の点 $x = (x_1, ..., x_n)$ のノルムを $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ と書くとき、以下の問に答えよ。

(1) 2変数関数 u_2 と3変数関数 u_3 を

$$u_2(x_1, x_2) = \log|x| \ , \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{|x|} \ , \qquad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$$

とするとき、これらが各々$\mathbf{R}^2$、$\mathbf{R}^3$ の原点以外 $(x \neq 0)$ で

$$-\Delta u = 0$$

を満たすことを示せ。
（ただし、n 変数関数 $u(x)$ $(x = (x_1, ..., x_n))$ について $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ 。）

(2) 2次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^2$ の原点を中心とする単位球を $B = \{x = (x_1, x_2) | \quad |x| < 1\}$ とし、問題

$$u - \Delta u + < x, \nabla u > - |x| = 0 \qquad B \quad \text{の中で}$$

$(*)$

$$u(x) = 1 \qquad \partial B \quad \text{の上で}$$

を考える。ただし、∂B は B の境界、$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)$ で、$< \cdot, \cdot >$ は $\mathbf{R}^2$ のスカラー積を表す。

(i) (1) の関数 u_2 を用いて $v = \exp(u_2)$ と定義するとき、v が連続かつほとんどいたるところで2回連続偏微分可能で、

$$v - \Delta v + < x, \nabla v > - |x| \leq 0 \qquad B \quad \text{の中で}$$

$$v(x) \leq 1 \qquad \partial B \quad \text{の上で}$$

が成立することを示せ。上の不等号が成立する時、関数 v を $(*)$ の劣解という。

(ii) (i) とは逆に、

$$w - \Delta w + < x, \nabla w > - |x| \geq 0 \qquad B \quad \text{の中で}$$

$$w(x) \geq 1 \qquad \partial B \quad \text{の上で}$$

が成立する時、関数 w を $(*)$ の優解という。$(*)$ の優解をひとつ見つけよ。

$\boxed{8}$ 正の整数 b に対して $a = b^2 + 1$ とし、$\alpha = \sqrt{a + \sqrt{a}}$ とする。
有理数体 $\boldsymbol{Q}$ に α を添加した体 $\boldsymbol{Q}(\alpha)$ が $\boldsymbol{Q}$ の 4 次巡回拡大体
（ガロア拡大でガロア群が巡回群）であることを、次の順に証明せよ。

(1) α は、有理数係数の 4 次既約方程式

$$f(X) = X^4 - 2aX^2 + ab^2 = 0$$

の解であることを示し、この方程式の他の解をすべて求めよ。

(2)

$$\beta = \frac{\sqrt{a - \sqrt{a}}}{\sqrt{a + \sqrt{a}}}$$

をできるだけ簡単な式で表せ。（分母を有理化すること。）また、体 $\boldsymbol{Q}(\alpha)$ は、
$\sqrt{a}$ および $f(X) = 0$ のすべての解を含むことを示せ。

(3) $\sqrt{a + \sqrt{a}}$ を $\sqrt{a - \sqrt{a}}$ に写す体 $\boldsymbol{Q}(\alpha)$ の自己同型写像 σ に対して、σ^2 が恒等写像
となることはないことを示し、ガロア群が巡回群であることを示せ。

$\boxed{9}$ (1) 実数係数の多項式環 $\mathbf{R}[X]$ から直積 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ への写像 φ を

$$\varphi \ : \ \mathbf{R}[X] \ni f(X) \mapsto (f(1), f(-1)) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

で定める．このとき，次の問いに答えよ

(i) φ は環準同型であることを示せ．
(ii) φ は全射であることを示せ．
(iii) φ の核はイデアル $(X^2 - 1)$ であることを示せ．

(2) 次の剰余環が整域であるかどうか調べよ．

(i) $\mathbf{R}[X]/(X^2 - 1)$
(ii) $\mathbf{R}[X]/(X^2 + 1)$

$\boxed{10}$ n 次直交行列全体の集合を $O(n)$ とする。すなわち、

$$O(n) = \{A \in M(n, R) \mid {}^tAA = E = A^tA\}$$

ここで、E は単位行列で、 $M(n, R)$ は n 次実正方行列全体の集合を表す。
このとき、次を示せ。

(1) $O(n)$ は積に関して群になる。

(2) $O(n)$ に $M(n, R) = R^{n^2}$ の部分空間としての位相を与えるとき、$O(n)$ はコンパクトである。

(3) 次の 2 つの写像は、ともに連続である。

$$\varphi : O(n) \times O(n) \to O(n), \quad \varphi(A, B) = AB \quad (A, B \in O(n)),$$

$$\psi : O(n) \to O(n), \quad \psi(A) = A^{-1} \quad (A \in O(n)).$$

$\boxed{11}$ 零でない実数 a に対して、 xyz 空間上の関数 $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^a$ とする。次の問いに答えよ。

(1) f の勾配ベクトル場 $(\nabla f)(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ は、球面 $S^2 = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 上の各点で S^2 に垂直であることを示せ。

(2) ∇f の発散 $\mathrm{div}(\nabla f)$ を Δf とする。原点 $(0, 0, 0)$ 以外の各点で $\Delta f = 0$ となるような定数 a を求めよ。

(3) $t = 0$ のとき、$\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ を通り、$(\nabla f)(x(t), y(t), z(t)) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ を満たす曲線 $P(t)$ について、$P(t)$ と原点からの距離を計算せよ。ただし、$x'(t)$ は $x(t)$ の t に関する微分を表す。