2001年9月

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) 次の積分を計算せよ.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \sin x \, dx$$

(2) 次の極限を求めよ.

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \left\{ \int_{-\epsilon}^{0} \frac{\sin x}{x} \, dx + \int_{0}^{+\epsilon} \frac{\sin x}{x} \, dx \right\}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ a を定数とし, 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

で定め, 線形写像 $f: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める.

(1) $\mathbf{R}^3$ の部分空間

$$U = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3 | \ f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \ \}$$

が $\{\mathbf{0}\}$ でないときの a の値を求め, そのときの U の基 (基底) を一組求めよ.

(2) $\mathbf{R}^3$ の部分空間

$$V = \{f(\boldsymbol{x}) | \ \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3 \ \}$$

の基 (基底) を一組求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ n を自然数とする。

(1) 点 O を中心とする円の円周を $2n-1$ 等分し, 等分点を順に $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_{2n-1}$ とする。点 O とある点 P_i を結び, 円周上 P_i の両隣の点同士, さらにその両隣の点同士を結び, 以下同様にして 2 個の点の組を n 個作る。例えば $n=4$ で, 点 O と 点 P_3 を結んだときには, $(\mathrm{O}, \mathrm{P}_3), (\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_4), (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_5), (\mathrm{P}_7, \mathrm{P}_6)$ が得られる。$i \neq j$ のとき, 点 O と点 P_i を結んだときに得られる組と, 点 O と点 P_j を結んだときに得られる組には, 同じ 2 点同士の組はないことを示せ。

(2) $2n$ チームがリーグ戦をする。試合日にはどのチームも 1 試合をする。試合日が何日あれば, どのチームもどの相手とも 1 回ずつ対戦することができるか。また, そのとき, 試合の組み合わせ表の作り方を示せ。

$\boxed{\mathbf{4}}$

$$f(X) = X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = \frac{X^7 - 1}{X - 1}$$

とする。方程式 $f(X) = 0$ の解である複素数の一つを ζ とする。

(1) $\alpha = \zeta + \zeta^{-1}$ は 3 次方程式

$$g(Y) = Y^3 + Y^2 - 2Y - 1 = 0$$

の解であることを示せ。また, $g(Y)$ は整数係数の多項式として既約であることを示せ。

(2) $\beta = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$ の満足する整数係数の 2 次方程式を求めよ。

(3) 有理数体 $\mathbf{Q}$ と ζ によって生成される体 $\mathbf{Q}(\zeta)$ に $\sqrt{-7}$ は含まれるが, $\sqrt{7}$ は含まれないことを示せ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 有理数を成分にもつ 2 次正方行列全体のなす環を M で表す。行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

とおき，この A と可換である M の元全体を R，即ち

$$R = \{\ X \in M \mid AX = XA\ \}$$

とする。次の問に答えよ。

(1) 単位行列を E，有理数体を $\mathbf{Q}$ で表すとき，

$$R = \{\ sA + tE \mid s, t \in \mathbf{Q}\}$$

となることを示せ。

(2) $(sA + tE)^2 = 5E$ となる有理数 s, t の組を求めよ。

(3) R は $\mathbf{Q}$ 上 $\sqrt{5}$ によって生成される 2 次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ と同型になることを示せ。

$\boxed{\mathbf{6}}$ k を自然数とし, 領域

$$D = \{(x,y) |\ x^2 + y^2 \leq 1\ \}$$

上の関数

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)^k$$

を考える。D 上定義される曲面

$$M = \{(x,y,z) |\ z = f(x,y),\ (x,y) \in D\ \}$$

について, 次を求めよ。

(1) M 上の単位法ベクトル場 $\boldsymbol{n}$.
(2) 曲面 $\boldsymbol{M}$ の表面積 $\boldsymbol{S}$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ 複素数体を $\mathbf{C}$, 実数体を $\mathbf{R}$ で表す。位相群

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \middle|\ z_i \in \mathbf{C}\ (i = 1,2,3,4), \quad |A| = 1 \right\}$$

の部分集合 $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\ z \in \mathbf{C} \right\}, \quad L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\ a \in \mathbf{R} \right\}$ について次の問いに答えよ。

(1) U は G の部分群で, かつ閉集合であることを示せ。
(2) U の G における正規化群 $N(U)$ を求めよ。
(3) G の U による商空間 G/U は $\mathbf{C}^2 - \{\mathbf{0}\}$ と同相であることを示せ。
(4) G/U への自然な左 G-作用を L に制限したとき, 不動点集合 $F(L, G/U)$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{8}}$ 区間 $[a,b]$ 上で定義された関数 $f(x)$ と, 分点を $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ とする $[a,b]$ の分割 Δ に対して,

$$v_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

とおく。すべての分割の仕方についての $v_\Delta(f)$ の上限

$$V_a^b(f) = \sup_\Delta v_\Delta(f)$$

が有限であるとき, 関数 $f(x)$ は区間 $[a,b]$ 上で有界変動であるという。以下の問いに答えよ。

(1) $f(x) = x^2$ に対して $V_{-1}^1(f)$ を求めよ。

(2) 区間 $[a,b]$ 上の有界変動関数 $f(x)$ に対して, $g(x) = V_a^x(f) - f(x)$ とおく。このとき, $g(x)$ は区間 $[a,b]$ 上で単調増加関数であることを示せ。

(3) 有界変動関数 $f(x)$ の不連続点は高々可算個であることを示せ。

(4) 連続関数であって, 有界変動関数でない例を一つあげよ。

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) 区間 $[0,T]$ 上の 2 つの連続関数 $g(t)$, $w(t)$ と定数 $\beta > 0$ が, その区間上で

$$w(t) \leq \beta \int_0^t w(s)\,ds + g(t)$$

をみたしているとする。さらに

$$v(t) = \beta \int_0^t w(s)\,ds$$

とおく。このとき, 区間 $[0,T]$ 上で次の 2 つの不等式が成り立つことを示せ。

(a) $(v(t)e^{-\beta t})' \leq \beta g(t) e^{-\beta t}$.

(b) $w(t) \leq \beta \displaystyle\int_0^t e^{\beta(t-s)} g(s)\,ds + g(t)$.

(2) $\alpha > 0$, $\delta > 0$ は定数とする。2 つの連続関数 $g_i(t)$ $(i = 1, 2)$ が区間 $[0,T]$ 上で

$$|g_1(t) - g_2(t)| \leq \delta$$

をみたしているとする。このとき, 微分方程式

$$x_i'(t) - \alpha x_i(t) = g_i(t), \qquad x_i(0) = 0,$$

の解 $x_i(t)$ $(i = 1, 2)$ は, 区間 $[0,T]$ 上で

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \frac{\delta}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1)$$

をみたすことを示せ。

$\boxed{\mathbf{10}}$ 整数全体 $\mathbf{Z}$ 上で定義された複素数値関数 $f(n)$ であって,

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} |f(n)|^2 < \infty$$

をみたすもの全体のなすヒルベルト空間を $H = \ell^2(\mathbf{Z})$ で表す。H 上の有界作用素 U を

$$(Uf)(n) = f(n+1) \qquad (f \in H, n \in \mathbf{Z})$$

で定義する。 以下の問いに答えよ。

(1) U はユニタリ作用素であることを示せ。
(2) $f, g \in H$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \langle U^n f, g\rangle = 0$$

となることを示せ。ただし, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は H の内積である。
(3) $T = \frac{1}{2}(U + U^*)$ とおくとき, $\lambda = \pm 1$ は T の固有値ではないことを示せ。
(4) フーリエ級数の議論を用いて, (3) で定義された T のスペクトル $\sigma(T)$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{11}}$ $\Omega = \{\omega = (x, y)\,;\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ として, Ω 上に

$$P(E) = \iint_E dx dy \qquad (E \subset \Omega)$$

で定義される確率測度 P を定める。AB を長さ 1 の線分とする。各 $\omega = (x, y) \in \Omega$ に対して AB 上に 2 点 X, Y を AX, BY の長さがそれぞれ x, y となるように対応させる。一般に, 線分 PQ の長さを |PQ| で表す。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 AX と線分 BY に共通部分がないという事象を E とする。$P(E)$ を求めよ。
(2) 条件付確率

$$P\left(|\mathrm{AX}| \ge \frac{1}{3}\middle| E\right)$$

を求めよ。
(3) |XY| の平均値 $E(|\mathrm{XY}|)$ を求めよ。
(4) すべての $-\infty < t < +\infty$ に対して

$$P(|\mathrm{XY}| \le t) = \int_{-\infty}^{t} \rho(s)\, ds$$

をみたす $\rho(s)$ (つまり |XY| の確率密度関数) を求め, そのグラフの概形を示せ。