2002年9月

1 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ について、次の問に答えよ。

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(2) A は対角化不可能であることを示せ。

(3) A を正則行列によって三角化せよ。

2 (1) 関数

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

の2次導関数 $f''(x)$ を求め、$f''(x)$ の $x = 0$ における連続性を調べよ。

(2) 正の定数 a, b に対して、$\mathbf{R}^2$ の閉領域を $A = \left\{ (x, y) \mid \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \right\}$ とするとき、積分

$$\iint_A (x^2 + y^2) dx dy$$

を求めよ。

3 実 n 次元空間 $\mathbf{R}^n$ の部分集合

$$B = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$$

に含まれる m 個の点 $A_1, A_2, ..., A_m$ は、どの 2 点も距離が $\sqrt{2}$ 以上離れている。次の問に答えよ。

(1) $A_1 = (a_1, 0, ..., 0),\ a_1 < 0$ ならば、$A_2, ..., A_m$ の x_1 座標は 0 以上であることを証明せよ。

(2) $m > n$ とし、$A_1 = (a_1, 0, ..., 0), A_2 = (b_{21}, a_2, 0, ..., 0), \cdots, A_n = (b_{n1}, b_{n2}, ..., b_{n,n-1}, a_n)$ とする。ここで A_i の $i+1$ 番目以上の座標はすべて 0 で、i 番目の座標 $a_i < 0$ である。このとき、$j < i$ に対して $b_{ij} \geq 0$ であること、および $A_{n+1}, ..., A_m$ のすべての座標が 0 以上であることを証明せよ。

(3) (2) の条件の下で、$m \leq 2n$ であることを証明せよ。また、$m = 2n$ のときには $A_1, ..., A_{2n}$ はどのような点か示せ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ n 次正方行列全体の作る環を M とする。M から M への環準同型写像

$$f : M \to M$$

に対して、

$$f(aE) = aE, \quad (a\text{ は任意のスカラー},\ E\text{ は単位行列})$$

であるとき、次の問に答えよ。

(1) (i,j) 成分が 1 で、他のすべての成分が 0 である行列を e_{ij} と表し、$E_{ij} = f(e_{ij})$ とする。任意の $A = (a_{ij}) \in M$ に対して、

$$f(A) = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}$$

であることを示せ。

(2) f は同型写像であることを示せ。

(3) 任意の $A \in M$ に対して、A の固有値は $f(A)$ の固有値であることを示せ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 多項式 $x^4 + 1$ を、次の体を係数として、それぞれ素因数分解せよ。

(a) 実数体 $\mathbf{R}$

(b) 複素数体 $\mathbf{C}$

(c) 有理数体 $\mathbf{Q}$

(d) 以下の素数 p に対して、p 個の元からなる有限体 $\mathbf{F}_p$

$p = 2, \quad p = 5, \quad p = 17$

(2) (1) の体を (一般に) K とするとき、$K[x]$ は K 係数の多項式環を表す。剰余環 $R = K[x]/(x^4 + 1)$ の構造を、(1) のそれぞれの体に対し決定せよ。

$\boxed{\mathbf{6}}$ $S^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 | {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1 \right\}$ を2次元球面とする。写像 $\varphi : \mathbf{R} \times S^2 \to \mathbf{R}^3$

$$\varphi(t, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \left(\frac{2x_1 e^t}{(1+x_3)e^{2t} + (1-x_3)}, \frac{2x_2 e^t}{(1+x_3)e^{2t} + (1-x_3)}, 1 - \frac{2(1-x_3)}{(1+x_3)e^{2t} + (1-x_3)} \right)$$

に対して、次の各問に答えよ。

(1) φ は $\mathbf{R} \times S^2$ から S^2 への微分可能な写像であることを示せ。

(2) $\varphi(0, x) = x,\ \varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t+s, x) \quad (t, s \in \mathbf{R},\ x \in S^2)$ をみたすことを示せ。

(3) $a \in S^2$ に対して、$\varphi_a(t) = \varphi(t, a) \quad (t \in \mathbf{R})$ とおく。曲線 $\varphi_a(t)\,(t \in \mathbf{R})$ の $t = 0$ における速度ベクトル X_a を求めよ。

(4) $a = (1, 0, 0) \in S^2$ に対して、$\{\varphi(t, a) \,|\, t \in \mathbf{R}\}$ を図示せよ。

$\boxed{\mathbf{7}}$ $\mathbf{R}^3$ の部分集合 $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$ を考える。次の問に答えよ。

(1) 空間 $X \subset \mathbf{R}^3$ を $X = \{(s, t, u) \in \mathbf{R}^3 \,|\, s^2 + t^2 + u^2 = 1, u \neq 0\} \cup \{(1, 0, 0), (-1, 0, 0)\}$ で与える。集合 S と1点のみで交わる $\mathbf{R}^3$ 内の向きを考えた直線全体のなす空間は, $X \times S^1$ となることを示せ。またその基本群を求めよ。

(2) 閉区間 $[0, 1]$ の直積空間 $[0, 1] \times [0, 1]$ の点 (φ, ψ) に対し、同一視

$$(\varphi, 0) \sim (\varphi, 1),\ (0, \psi) \sim (1, \psi),\ (0, \psi) \sim (0, \psi + \frac{1}{2})$$

を考えたものを Y とおく。このとき、S に直交する $\mathbf{R}^3$ 内の向きを考えない直線全体の成す空間は、Y となることを示せ。またその基本群を求めよ。

$\boxed{\mathbf{8}}$

$N \times N$ 複素行列 $A = (a_{ij})$ に対し

$$\gamma(A) = \max\{|a_{ij}| \,:\, i,\, j = 1,\, 2,\, \ldots,\, N\}$$

と定める。また、$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^N$ に対し $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ として

$$\|A\| = \sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \,: x \in \mathbf{C}^N,\, x \neq 0\right\}$$

と定める。(つまり、$\|A\|$ は A の作用素ノルム)

(1)　$\gamma(A) \leq \|A\| \leq N\gamma(A)$ を示せ。

(2)　$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \text{\Large 0} \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ \text{\Large 0} & & & & \lambda \end{pmatrix}$ に対して、$\lim_{n\to\infty}(\gamma(A^n))^{\frac{1}{n}} = |\lambda|$ を示せ。

(3)　(2) と同じ A について、$\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = |\lambda|$ を示せ。

(4)　任意の $N \times N$ 複素行列 A に対して

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\geq 1} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \max\{|\lambda| \,:\, \lambda \text{は} A \text{の固有値}\}$$

を示せ。

$\boxed{\mathbf{9}}$　3 頂点 A, B, C 上を離散時間 $n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$ の経過とともに移動する動点がある。時刻 n におけるその動点の位置を X_n で記す。この動点は次の規則で動く。

(i)　$X_0 = A$

(ii)　時刻 n である頂点にいるとき、つぎの時刻 $n+1$ では、残り 2 つの頂点のいずれかに等確率で移動する。

次の問に答えよ。

(1)　初めて C に到達したときの時刻 T の平均 $\mathbf{E}(T)$ と分散 $\mathbf{V}(T)$ を求めよ。

(2)　$a_n = \mathrm{P}(X_n = \mathrm{A}),\, b_n = \mathrm{P}(X_n = \mathrm{B}),\, c_n = \mathrm{P}(X_n = \mathrm{C})$ とおくとき

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

をみたす 3×3 行列 F を求めよ。これを利用して $\lim_{n\to\infty} a_n,\, \lim_{n\to\infty} b_n,\, \lim_{n\to\infty} c_n$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{10}}$　数直線 $\mathbf{R}$ 上の関数 g は下に有界な連続関数とし、これを用いて各 $(x,t) \in \mathbf{R} \times (0\,,\,+\infty)$ に対して $u(x,t)$ を

$$u(x,t) = \min_{y\in\mathbf{R}} \left\{ \frac{(x-y)^2}{2\,t} + g(y) \right\}$$

で定義する。次の問に答えよ。

(1)　関数 g が $g(x) = \dfrac{x^2}{2s}$, $s>0$, で与えられるとき、上の $u(x,t)$ を求めよ。

(2)　ある定数 C が存在して

$$g(x+z) - 2\,g(x) + g(x-z) \le C\,z^2 \qquad (x, z \in \mathbf{R})$$

が成立するとき、 u は

$$u(x+z,t) - 2\,u(x,t) + u(x-z,t) \le C\,z^2 \quad (x, z \in \mathbf{R}\,,\; 0 < t < +\infty)$$

を満たすことを示せ。

(3)　$\mathbf{R} \times (0\,,\,+\infty)$ 上の関数 η を用いて

$$u(x,t) = \frac{\{x - \eta(x,t)\}^2}{2\,t} + g(\eta(x,t)) \qquad ((x,t) \in \mathbf{R} \times (0\,,\,+\infty))$$

と書けるとき、各 $x \in \mathbf{R}$ において

$$\lim_{t\to+0} \eta(x,t) = x \;\;, \qquad \lim_{t\to+0} u(x,t) = g(x)$$

であることを示せ。

(4)　$g \in C^1(\mathbf{R})$ とし、$\eta \in C^1(\mathbf{R} \times (0\,,\,+\infty))$ を仮定して

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right\}^2 = 0$$

を証明せよ。

$\boxed{\mathbf{11}}$ (1) N 個の数 $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ に対して

$$A_m = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{i2\pi\frac{m}{N}j} \quad (m = 0, 1, \ldots, N-1)$$

とおくとき、各 $n = 0, 1, \ldots, N-1$ に対して

$$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} A_m e^{-i2\pi\frac{n}{N}m} = a_n$$

が成立することを示せ。ここで、i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ を表し、$e^{i\theta}$ は単位円周上の複素数 $\cos\theta + i\sin\theta$ である。

(2) 周期 2π の滑らかな周期関数 f のフーリエ級数展開を

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ixk}$$

とする。自然数 N を固定しておき、各 $j = 0, 1, \ldots, N-1$ に対して

$$C_j = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{j+Nk}$$

とおく。このとき $m = 0, 1, \ldots, N-1$ に対して

$$f\left(2\pi\frac{m}{N}\right) = \sum_{j=0}^{N-1} C_j e^{i2\pi\frac{m}{N}j}$$

が成立することを示せ。

(3) 各 N に対して (2) で定義された $C_0, C_1, \ldots, C_{N-1}$ を $C_0^{(N)}, C_1^{(N)}, \ldots, C_{N-1}^{(N)}$ と書くとき、極限値

$$\lim_{N\to\infty} C_n^{(N)} \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

は何を表すか答えよ。