2003年9月

※ 問題 $\boxed{3}$ の問 (4) に誤りがありました（問題 $\boxed{3}$ を参照）。

$\boxed{\mathbf{1}}$　K を体, K^n を K 上の n 次元列ベクトル空間とし, A を K の元を成分とする n 次正方行列とする。任意の $\alpha \in K$ に対して,

$$T(\alpha) = A - \alpha E \quad (E \text{ は単位行列}),$$

$$W(\alpha) = \{\ v \in K^n \mid T(\alpha)^n v = o\ \}$$

とおくとき, 次の問いに答えよ。

(1) 任意の $\alpha, \beta \in K$ に対して, $T(\alpha)T(\beta) = T(\beta)T(\alpha)$ となることを示せ。

(2) $W(\alpha)$ は K^n の A 不変な部分空間となることを示せ。

(3) $W(\alpha) \neq \{o\}$ となるための必要十分条件は α が A の固有値であることを示せ。

(4) $\alpha \neq \beta \in K$ ならば, $W(\alpha) \cap W(\beta) = \{o\}$ となることを示せ。

$\boxed{\mathbf{2}}$　以下の問いに答えよ。

(1) 次をみたす実数 α の範囲を求めよ。

$$\lim_{x \to +0} x^\alpha \log \sin x = 0$$

(2) 次の等式が成立することを示せ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log \sin x dx$$

(3) 次の極限値が存在することを示し, これを求めよ。

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 有限な全体集合 X の部分集合 A に対して, X における A の補集合を A^c で表す。X の部分集合 A, B に対して, 「和」 $A+B$ を $A+B=(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)$ で定義する。さらに, X の部分集合 $A_1, A_2, \ldots, A_m$ に対して, 「和」 $A_1+A_2+\cdots+A_m$ は $(\cdots((A_1+A_2)+A_3)+\cdots)+A_m$ を意味するものとする。また, 一般に, 有限集合 Y の元の個数を $|Y|$ で表す。

(1) A, B, C を X の部分集合とするとき, $(A+B)\cap C=(A\cap C)+(B\cap C)$ が成り立つことを示せ。

(2) A, B, C を X の部分集合とするとき, $(A+B)+C=A+(B+C)$ が成り立つことを示せ。

(3) $A_1, A_2, \ldots, A_m$ を X の部分集合とするとき,

$$|A_1+A_2+\cdots+A_m|=\sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,\ldots,m\}}(-2)^{|I|-1}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right|$$

が成り立つことを示せ。

(4) $X=Y\cup Z$ $(X\cap Y=\emptyset)$, $Y=\{y_1,\ldots,y_5\}$, $Z=\{z_1,z_2,z_3\}$, $|Y|=5$, $|Z|=3$ とする。

$$\mathcal{A}=\{A \mid A\subseteq X,\ |A|=5,\ |A\cap Y|=3 \text{ または } 4\}$$

とおいて, $\mathcal{A}=\{A_1,\ldots,A_n\}$ とするとき, $A_1+A_2+\cdots+A_n$ を求めよ。

[訂正] (4) において $(X\cap Y=\emptyset)$ を $(Y\cap Z=\emptyset)$ とする。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 半直線 $[0,+\infty)$ 上のボレル測度 μ を

$$\mu(E) = \#\{n \in \mathbf{N}\,;\, 2^n \in E\}, \qquad E \subset [0,+\infty),$$

で定義する。ただし, $\#F$ は集合 F の元の個数を表し, $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$ である。

(1) 次の積分を計算せよ。

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mu(dx)$$

(2) $0 < r < +\infty$ なる r に対して, 2 変数の関数 χ_r を

$$\chi_r(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq y \leq r \text{ のとき}, \\ 0, & \text{その他}, \end{cases}$$

で定義する。このとき, 積分

$$\int_0^{+\infty} \mu(dx) \int_0^{+\infty} \frac{\chi_{2^n}(x,y)}{y}\,dy$$

を計算せよ。ただし, $n \in \mathbf{N}$ である。

(3) 関数 $N(y)$ を

$$N(y) = \#\{n \in \mathbf{N}\,;\, 2^n \leq y\}, \qquad 0 \leq y < +\infty,$$

で定義する。このとき, 任意の $0 < r < +\infty$ に対して

$$\int_0^r \frac{N(y)}{y}\,dy = \sum_{n \in \mathbf{N}\,:\,2^n \leq r} \log \frac{r}{2^n}$$

が成立することを示せ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 実数 $\mathbf{R}$ 上で定義された C^∞-級関数 $\phi(x)$ は, コンパクトな台をもち,

$$\phi(x) \geq 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,dx = 1$$

を満たしているものとし, 自然数 n に対して

$$\phi_n(x) = n\phi(nx)$$

とおく。また, 可積分関数 $f \in L^1(\mathbf{R})$ に対して

$$\phi_n * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x-y) f(y)\,dy$$

とおく。次の問いに答えよ。

(1) 任意の $\delta > 0$ に対して, ある $N \geq 1$ が存在し, $n \geq N$ ならば

$$\int_{-\delta}^{\delta} \phi_n(x) dx = 1,$$

が成り立つことを示せ。

(2) $\phi_n * f(x)$ は有界な C^∞-級関数であることを示せ。

(3) 可積分関数 $f(x)$ が有界かつ連続であれば, $\phi_n * f(x)$ は $f(x)$ に広義一様収束することを示せ。

$\boxed{\mathbf{6}}$ $\mathcal{H}$ をヒルベルト空間、$\{\phi_n\,;\, n=0,1,2,\dots\}$ をその完全正規直交基底とする。

(1) 線型作用素 T を

$$T\phi_0 = 0, \qquad T\phi_n = \phi_{n-1}, \qquad n \geq 1,$$

によって定義すると, T は有界作用素になることを示せ。

(2) 有界線型作用素 A で,

$$A\phi_0 = 0, \qquad A\phi_n = \sqrt{n}\,\phi_{n-1}, \qquad n \geq 1,$$

を満たすものは存在しないことを示せ。

(3) (2) の A に対して, 定義域 $\mathcal{D}$ を

$$\mathcal{D} = \left\{ \phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n\,;\, \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 < \infty \right\}$$

によって定義する。$A\phi = \lambda\phi$ を満たす 複素数 $\lambda \in \mathbf{C}$ と単位ベクトル ϕ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{7}}$ 公正なコイン n 個を同時に投げたとき, 表の出たコインの枚数を A_n, 裏の出たコインの枚数を B_n とする。次の問いに答えよ。

(1) A_nB_n の平均値 $\mathbf{E}(A_nB_n)$ を求めよ。

(2) $X_n = A_n - B_n$ とおくとき, X_n の確率分布を求めよ。

(3) (2) で定義した X_n の平均値 $\mathbf{E}(X_n)$ と分散 $\mathbf{V}(X_n)$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{8}}$ $M_n(\mathbf{R})$ を n 次実正方行列の全体とし, $\mathbf{R}^{n^2}$ と同一視して位相空間とみなす。$O(n)$ を n 次直交群, すなわち

$$O(n) = \{A \in M_n(\mathbf{R});\ {}^tAA = A\,{}^tA = I\}$$

とし, $M_n(\mathbf{R})$ の相対位相により位相空間とみなす。ここで I は n 次単位行列である。このとき次の問いに答えよ。

(1) $O(n)$ は $\mathbf{R}^{n^2}$ の有界閉集合であることを示せ。

(2) $O(n)$ を $\mathbf{R}^n$ に次のように作用させる：

$$O(n) \times \mathbf{R}^n \ni \left(A, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n .$$

この作用は $(n-1)$ 次元球面 $S^{n-1} = \{\mathbf{x} = {}^t(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n;\ \sum_{i=1}^n {x_i}^2 = 1\}$ を不変に保つことを示せ。

(3) S^{n-1} 内の点 $\mathbf{x}_0 = {}^t(1, 0, \cdots, 0)$ における $O(n)$ の等方部分群 $O(n)_{\mathbf{x_0}} = \{A \in O(n);\ A\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0\}$ を求めよ。

(4) $O(n)$ が $\mathbf{R}^n$ 内の単位球面 S^{n-1} に推移的に作用することを示せ。

(5) 商空間 $O(n)/O(n-1)$ が S^{n-1} と位相同相であることを示せ。ただし, $O(n-1)$ は以下のようにして $O(n)$ の部分群とみなす：

$$O(n-1) := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array} \right) \in O(n) \mid B \in O(n-1) \right\} \subset O(n).$$

$\boxed{9}$ 直線 $\mathbf{R}$ において, 次のような関係を与える。$x, y \in \mathbf{R}$ に対して

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \text{ は整数.}$$

このとき, 次を示せ。

(1) $\sim$ は $\mathbf{R}$ における同値関係を与える。

(2) $\pi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}/\sim$ を自然な射影とする。次のように $\mathbf{R}/\sim$ の開集合 U を定義すると, $\mathbf{R}/\sim$ は位相空間になる。

$$U \text{ は } \mathbf{R}/\sim \text{ の開集合} \Longleftrightarrow \pi^{-1}(U) \text{ は } \mathbf{R} \text{ の開集合.}$$

(3) $\mathbf{S}^1 = \{(a,b) \in \mathbf{R^2} | a^2 + b^2 = 1\}$ とおくと, $\mathbf{R}/\sim$ は $\mathbf{S}^1$ と同相（位相同型）になる。

$\boxed{10}$ 以下の問いに答えよ。

(1) n 次対称群 S_n において, 長さ n の巡回置換 σ と交換可能な元は σ のべき以外に存在しないことを示せ。

(2) 5 次交代群 A_5 において, 長さ 5 の巡回置換 $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ と共役な元は全部でいくつあるか。

(3) 7 次交代群 A_7 において, 長さ 5 の巡回置換 $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ と共役な元は全部でいくつあるか。

$\boxed{11}$ 次の多項式について以下の問いに答えよ。

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^3 + 8 \\ f_2(x) &= x^3 - 2 \\ f_3(x) &= x^3 - 4x \\ f_4(x) &= x^3 - 3x + 1 \end{aligned}$$

(1) $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ の中で, 有理数体 $\mathbf{Q}$ 上既約となる多項式をすべてあげ, 既約であることを示せ。

(2) $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ の $\mathbf{Q}$ 上の分解体とそのすべての部分体を列挙せよ。

(3) $\zeta = e^{2\pi i/9}$ とおくとき, $\zeta + \zeta^8$ が $f_4(x)$ の根となることを示せ。また, $f_4(x)$ の $\mathbf{Q}$ 上の分解体とそのすべての部分体を列挙せよ。