2004年9月

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ。

(1) 定数 α は $-1 < \alpha < 0$ を満たすとする。実変数 x の関数 $(1+x)^\alpha$ のマクローリン級数展開（原点の周りでの整級数展開）を求め、その収束半径を求めよ。

(2)

$$I_k = \int_0^{\pi/2} \sin^k x \; dx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

とする。漸化式

$$I_{k+2} = \frac{k+1}{k+2} \, I_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

を証明せよ。

(3) 定数 a は $0 \leq a < 1$ を満たすとする。等式

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 x}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 a^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 a^4 + \ldots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}\right)^2 a^{2n} + \ldots \right\}$$

を証明せよ。

$\boxed{2}$ 2 変数の C^2 級関数 $f(x, y)$ と、(x, y) の極座標表示

$$x = r\cos\theta \ , \quad y = r\sin\theta$$

に関する次の関係式を証明せよ（ただし $r > 0$ とする）。

(1) $$\frac{\partial f}{\partial r} = \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y} \ , \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = -r\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

(2) $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\,\frac{\partial f}{\partial \theta} \ , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

(3) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

$\boxed{3}$ 3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

について次の問に答えよ。

(1) A の固有値を求めよ。

(2) **(1)** で求めた固有値のそれぞれに対応する固有空間を求めよ。

(3) 直交行列により、A を対角化せよ。

$\boxed{4}$　3次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への線形写像 f は

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に、$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ に、そして、$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

に写すとする。以下の問に答えよ。

(1)　$\mathbf{R}^3$ の標準基底

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に関する写像 f の行列表示を求めよ。

(2)　写像 f の核 $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$ と像 $\mathrm{Im}\, f = \{f(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3\}$ の次元を求めよ。

(3)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が $\mathbf{R}^3$ の基底となることを確かめ、この基底に関する写像 f の行列表示を求めよ。

$\boxed{5}$ 正の整数 n, k は $n \geq k$ であるものとして $t_{n,k}$ および $z_{n,k}$ を次のように定める。要素の個数が n である集合から要素の個数が k である集合への全射の総数を $z_{n,k}$ とする。 そして、要素の個数が k である集合から要素の個数が n である集合への単射の総数を $t_{n,k}$ とする。$n \geq k \geq 2$ であるとして次の問に答えよ。

(1) $t_{n,k}$ と $t_{n-1,k-1}$ の関係を求めよ。

(2) $z_{n,k} \geq k z_{n-1,k-1}$ を証明せよ。

(3) $z_{n,k} = k z_{n-1,k-1}$ ならば $n = k$ であることを証明せよ。

$\boxed{6}$ xy 平面において、x-軸上の点 P と、y-軸上の点 Q を、次のようなルールに従って移動させるものとする。$n = 0, 1, 2, \ldots$ とし、時刻 n における P, Q の位置 $P_n = (x_n, 0)$, $Q_n = (0, y_n)$ を次のように帰納的に定める：

(i) $x_0 = y_0 = 0$

(ii) 時刻 n において 2 枚の公正なコインを同時に振り、その結果として P_{n+1}, Q_{n+1} を

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 & \text{（表が 2 枚出た場合）} \\ x_n & \text{（その他の場合）} \end{cases}$$

$$y_{n+1} = \begin{cases} y_n + 1 & \text{（表が 1 枚出て、かつ裏も 1 枚出た場合）} \\ y_n & \text{（その他の場合）} \end{cases}$$

とする。

以下の問に答えよ。

(1) x_n を確率変数と考え、x_n の平均 $\mathbf{E}(x_n)$ と分散 $\mathbf{V}(x_n)$ を求めよ。

(2) 「表が 2 枚出る」という事象と「表が 1 枚出て、かつ裏も 1 枚出る」という事象は互いに独立ではないことを証明せよ。

(3) 原点を O とし、三角形 $\triangle OP_nQ_n$ の面積の平均を求めよ。

$\boxed{7}$ 閉区間 $I = [0,1]$ 上で定義された関数 f は I の各点で微分可能であり、かつ導関数 f' は I 上で連続であるとし、さらに $f(0) = 0$ とする。このとき I における $|f|$ の最大値 $\max_{0 \le x \le 1} |f(x)|$ は、$1 \le p < \infty$ なる任意の p に対して

$$\max_{0 \le x \le 1} |f(x)| \;\le\; \left\{ \int_0^1 |f'(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}$$

を満たすことを証明せよ。

$\boxed{8}$ ヒルベルト空間 H は正規直交基底 $\{\mathbf{e}_n \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ を持つとする。H 上の有界線形作用素 S は $S\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_{n+1}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ を満たすとする。以下の問に答えよ。

(1) S^* を S の共役作用素とする。$S^*\mathbf{e}_n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ を求めよ。

(2) S は H 上のユニタリ作用素であることを証明せよ。

(3) 作用素 A を $A = \frac{1}{2}(S + S^*)$ で定義する。内積

$$\langle \mathbf{e}_0\,,\ A^m \mathbf{e}_0 \rangle \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

を計算せよ。

$\boxed{9}$ 3次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の中の集合

$$S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

に $\mathbf{R}^3$ からの相対位相が与えられているものとして、以下の問に答えよ。

(1) S^2 が弧状連結であることを証明せよ。

(2) $p_0 = (0, 0, 1) \in S^2$ に対して $S^2 \setminus \{p_0\}$ から平面 $\mathbf{R}^2$ への同相写像を構成せよ。

(3) S^2 の各点 p に対して、$\mathbf{R}^2$ の開円板 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ と同相な、p の S^2 の中での開近傍 $U(p)$ が存在することを証明せよ。

$\boxed{10}$ $\mathbf{Q}$ を有理数体、$R=\mathbf{Q}[X]$ を $\mathbf{Q}$ 係数の多項式環とし、φ を R から R への零写像でない準同型写像とする。このとき次の問に答えよ。

(1) $a \in \mathbf{Q}$ について $\varphi(a)=a$ となることを示せ。

(2) R は単項イデアル環であることを示せ。

(3) φ が単射でないとき、φ の核は、適当な $a \in \mathbf{Q}$ を選び、$(X-a)$ と書けることを示せ。ただし $(X-a)$ は $X-a$ で生成される単項イデアルとする。