2005年3月

$\boxed{1}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ -1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ として、次の問に答えよ。

(1) A の固有値を求めよ。
(2) A の各固有値の固有空間を求めよ。
(3) A は対角化可能か否かその理由をつけて答えよ。

$\boxed{2}$ a, b, c は実数とし、行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 1+c & a-ib \\ a+ib & 1-c \end{pmatrix}$$

とする。ある 2 次の複素列ベクトル $\mathbf{x}$ が存在して、$A = \mathbf{x}\mathbf{x}^*$ となるための必要十分条件を求めよ。ここで、$\mathbf{x}^*$ は $\mathbf{x}$ の共役転置ベクトルであり、i は虚数単位を表す。

$\boxed{3}$ 方程式

$$e^{2x} - 2e^{x} - y^2 + 1 = 0$$

が (x, y)-平面の第 1 象限 $(x > 0, y > 0)$ と第 2 象限 $(x < 0, y > 0)$ において定める陰関数をそれぞれ $x = \psi_1(y)$ と $x = \psi_2(y)$ とする。定積分

$$\int_0^{1/2} \{\psi_1(y) - \psi_2(y)\}\, dy$$

を計算せよ。

$\boxed{4}$ 定数 α は $\alpha < 1$ とし、積分区域

$$D = \{\ (x, y) \mid 0 < x \leq 1,\ 0 \leq y < x\ \}$$

上の積分

$$I = \iint_D \frac{1}{(x-y)^\alpha} dxdy$$

を計算せよ。

$\boxed{5}$ n を自然数とする。1 から n までの数字 $\{1, \ldots, n\}$ の置換全体を S_n で表す。S_n の中、ある数字を固定する置換全体を

$$F_n = \{\sigma \in S_n | \sigma(i) = i \ (\exists\, i\,)\}$$

で表す。数字 1 に置換 σ を続けて行って得られる数の全体を

$$X_\sigma = \{\sigma^i(1) | i = 0, 1, 2, \ldots\}$$

で表す。一般に有限集合 X の元の個数を $\sharp X$ で表し、$a_n = \sharp F_n$ とする。以下の問に答えよ。

(1) a_1, a_2, a_3, a_4 を求めよ。
(2) 整数 k を $1 \leq k \leq n$ にとる。$\sharp X_\sigma = k$ となる置換の全体を $A_k = \{\sigma \in S_n \,|\, \sharp X_\sigma = k\}$ とおく。$\sharp A_k$ を求めよ。
(3) 整数 k を $1 \leq k \leq n$ にとる。$F_n \cap A_k$ の元の個数を a_{n-k} で表せ。
(4) a_n を $a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_1$ で表せ。

$\boxed{6}$ $\mathbb{Z}$ は整数環、$\mathbb{Q}$ は有理数体を表し、$\mathbb{Z}[x]$ は整数係数多項式環、$\mathbb{Q}[x]$ は有理数係数多項式環を表すとする。有理数係数多項式で、整数での値が常に整数になるものの全体を R とする。即ち

$$R = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(n) \in \mathbb{Z} \ (\forall n \in \mathbb{Z})\}$$

である。次の問に答えよ。

(1) R は $\mathbb{Q}[x]$ の部分環になることを示せ。

(2) $k = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$F_k(x) = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

とおく。すなわち $F_0(x) = 1, F_1(x) = x, F_2(x) = x(x-1)/2!, \cdots$ である。

(a) $F_k(x) \in R \ (k = 0, 1, 2, \cdots)$ を示せ。

(b) R の元 $f(x)$ は

$$f(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k F_k(x) \ \ (a_k \in \mathbb{Z})$$

とただ一通りに表せることを示せ。ただし、d は $f(x)$ の次数である。

(3) 正整数 m を任意に与える。p を m より大きい素数とするとき、(2) で定めた $F_k(x)$ について、$F_p(x)$ は $F_1(x), F_2(x), \cdots, F_m(x)$ の R-係数 1 次結合にはならないことを示せ。即ち、

$$F_p(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k(x) F_k(x) \ \ (a_k(x) \in R)$$

とはならないことを示せ。

(4) R はネーター環ではないことを示せ。

$\boxed{7}$ 任意の $\varepsilon \geq 0$ に対して $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$X_\varepsilon = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - z^2 + \varepsilon^2 = 0\}$$

を、$\mathbb{R}^3$ の標準位相から定まる相対位相により位相空間とみなす。次の問に答えよ。

(1) $\varepsilon > 0$ に対して、X_ε は弧状連結でないことを示せ。
(2) $\varepsilon = 0$ の時、X_0 は弧状連結であることを示せ。
(3) $\varepsilon > 0$ に対して、X_ε は 2 次元 C^∞-多様体となることを示せ。
(4) $\varepsilon = 0$ のとき、X_0 は 2 次元 C^∞-多様体だろうか？正しければ証明し、誤っていればその理由を述べよ。

$\boxed{8}$ 次の常微分方程式の初期値問題を考える：

$$(1+x^2)y''(x)+4xy'(x)+2y(x)-6x=0, \quad y(0)=y'(0)=1$$

次の問に答えよ。

(1) 関数 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ が上記を満たすとき、収束半径内で定数 a_n を求めよ。また、そのときの収束半径を求めよ。

(2) $-1<x<1$ として、次の関数のマクローリン展開を求めよ：

$$\frac{1}{1+x}$$

(3) 上の常微分方程式の初期値問題の $-\infty<x<\infty$ での解を求めよ。

$\boxed{9}$ n を 2 以上の自然数とする。$R > 1$ とし、複素平面上の積分経路 C_R を次で定義する：

$$\begin{aligned} C_R &= \{\, re^{i\theta} \,;\, 0 \le r \le R,\ \theta = 0 \,\} \cup \{\, re^{i\theta} \,;\, r = R,\ 0 \le \theta \le 2\pi/n \,\} \\ &\quad \cup \{\, re^{i\theta} \,;\, 0 \le r \le R,\ \theta = 2\pi/n \,\}. \end{aligned}$$

複素関数 $(1+z^n)^{-1}$ を考えることにより、次の定積分を求めよ：

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}dx.$$

$\boxed{10}$ 確率変数 X_n, Y_n を次のように定める：

1. $X_0 = Y_0 = 0,$
2. 時刻 $t = n$ において公平なサイコロを振り、その結果によって、

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1, & 1, 3, 5 \text{ が出た場合、} \\ X_n - 1, & 2, 4, 6 \text{ が出た場合、} \end{cases}$$

$$Y_{n+1} = \begin{cases} Y_n + 1, & 1, 2, 3 \text{ が出た場合、} \\ Y_n - 1, & 4, 5, 6 \text{ が出た場合、} \end{cases}$$

とする。次の問に答えよ。

(1) 確率変数 X_1, X_2 の確率分布を求めよ。
(2) 確率変数 X_1 と Y_1 は互いに独立ではないことを示せ。
(3) 確率変数 X_n の分布を求め、平均値と分散を求めよ。
(4) X_nY_n の平均値 $E[X_nY_n]$ を求めよ。