2005年8月

$\boxed{1}$ 次の問に答えよ。

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\log\frac{k}{n}$ を求めよ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(1^1 2^2 3^3 \cdots n^n)^{1/n^2}}{n^{1/2}}$ を求めよ。

$\boxed{2}$ $x^4+y^4-4xy=0$ が定める xy 平面内の曲線 C について，次の問に答えよ。

(1) 曲線 C は第 1 象限 $(x\geq 0, y\geq 0)$ および第 3 象限 $(x\leq 0, y\leq 0)$ に存在することを示せ。

(2) 曲線 C 上のすべての 点 (x,y) に対して $|x|\leq R, |y|\leq R$ をみたす定数 R の最小値を求めよ。

(3) 曲線 C の概形を描け。

$\boxed{3}$ V を実 n 項列ベクトルからなる線形空間 $\boldsymbol{R}^n$ とし，V 上の標準的な内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ と記す。V の標準基底を

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする。V の元 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \boldsymbol{e}_n$ について V から V への写像 f を

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 2\frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} \qquad (\boldsymbol{x} \in V)$$

によって定める。このとき次の問に答えよ。

(1) f は線形写像であることを示せ。

(2) すべての $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $f(f(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$ となることを示せ。

(3) f の標準基底に関する表現行列を求めよ。

$\boxed{4}$ a を実数とする。行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

について次の問に答えよ。

(1) A の行列式を求めよ。

(2) A の固有値を求めよ。

(3) A が正則行列であるとき，A の逆行列を求めよ。

$\boxed{5}$ n を自然数とし，$X = \{1, 2, \ldots, 2n+1\}$ とする。X の部分集合 A に対し，A の要素の個数を $|A|$ で表す。$|A| = n$ なる X の部分集合 A 全体からなる集合を X_n と書くことにする。$A, B \in X_n$ に対し，$A \cap B = \emptyset$ のとき $A \sim B$ と書くことにする。$A, B \in X_n$ に対して，次を示せ。

(1) ある $C \in X_n$ があって $A \sim C \sim B$ となる必要十分条件は，$|A \cap B| \geq n-1$ が成立することである。

(2) ある $C, D \in X_n$ があって $A \sim C \sim D \sim B$ となる必要十分条件は，$|A \cap B| \leq 1$ が成立することである。

$\boxed{6}$ 長さ 1 の線分をランダムに 2 分割し，得られた線分のうち長いほうの長さを L，短いほうの長さを S とする。ただし，同じ長さのときは，$L = S$ とする。次の量を計算せよ。

(1) 事象 $\{L \geq 2S\}$ の確率 $P(L \geq 2S)$

(2) S の確率密度関数 ρ_S

(3) L の平均値 $\mathbf{E}(L)$

(4) S の分散 $\mathbf{V}(S)$

(5) L と S の共分散 $C(L, S) = \mathbf{E}((L - \mathbf{E}(L))(S - \mathbf{E}(S)))$

$\boxed{7}$ f を全複素平面 $\boldsymbol{C}$ で正則な関数，α を整数でない複素数とする。関数 g を

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-\alpha)\sin \pi z} \qquad (z \in \boldsymbol{C} \setminus \{\alpha, 0, \pm 1, \pm 2, \dots\})$$

によって定義する。次の問に答えよ。

(1) g の留数をすべて求めよ。

(2) 原点中心，半径 $R > 0$ の円を $C(R) = \{z \in \boldsymbol{C} \mid |z| = R\}$ とする。$R \neq 1, 2, \dots$ かつ $C(R)$ の内部に α があるとき，

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(R)} g(z)\, dz$$

と (1) で求めたものとの関係を述べよ。

(3) 関数 f は，$|z| = |x + iy| \to \infty$ のとき，

$$e^{-\pi |y|} f(z) \to 0$$

を満たすものとする。このとき，

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin\{\pi(z-n)\}}{\pi(z-n)} \qquad (z \in \boldsymbol{C} \setminus \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\})$$

が成り立つことを示せ。

$\boxed{8}$ 次の問に答えよ。

(1) 区間 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ の定義関数 $\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$ のフーリエ変換を求めよ。ただし，$(-\infty, \infty)$ 上の可積分関数 f のフーリエ変換 $\hat{f}$ は

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx \qquad (-\infty < t < \infty)$$

で定義される。

(2) (1) を用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} \, dx = \pi$$

を示せ。

(3) (2) を用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

を求めよ。

$\boxed{9}$ 平面 $\boldsymbol{R}^2$ の 2 点 $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)$ に対して，

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}, \\ d_2(x,y) &= \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}, \\ d_3(x,y) &= |x_1-y_1|+|x_2-y_2| \end{aligned}$$

と定義する。

(1) d_1, d_2, d_3 はそれぞれ $\boldsymbol{R}^2$ における距離を与えることを示せ。

(2) d_1, d_2, d_3 に関して，中心が原点 $o=(0,0)$ で半径が 1 の円

$$S_i = \{x \in \boldsymbol{R}^2 \mid d_i(o,x)=1\} \qquad (i=1,2,3)$$

を図示せよ。

(3) d_1, d_2, d_3 が与える $\boldsymbol{R}^2$ の位相は互いに一致することを示せ。

$\boxed{10}$ 以下の問では，環は単位元を持つ可換環とする。

(1) 環 R の 0 でない二元 x, y が，$xy=0$ をみたし，かつ x, y で生成されたイデアルが R に一致するならば，R の元 e で $e^2=e$, $e \neq 0, 1$ なるものが存在することを示せ。

(2) 環 R はある代数閉体 K を部分環として含むものとし，R の K 上のベクトル空間としての次元 $g=\dim_K R$ は有限とする。さらに，R の元 x に対して「$x \neq 0$ ならば $x^2 \neq 0$」が成り立つとする。R の任意の元の K 上の最小多項式は重根を持たないことを示せ。

(3) (2) と同じ仮定の下で，さらに $g \neq 1$ ならば，$e^2=e$ をみたす R の元が少なくとも 4 個存在することを示せ。