2007年8月

$\boxed{1}$ 定数 a, b, c は正とし，

$$E = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0 \right\}$$

とする。

(1) λ を定数とし，$G(x, y, z) = xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$ とする。$G_x(x_0, y_0, z_0) = G_y(x_0, y_0, z_0) = G_z(x_0, y_0, z_0) = 0$ となる E 上の点 (x_0, y_0, z_0) を求めよ。

(2) 関数 $g(x, y, z) = xyz$ の E 上での最大値を求めよ。

$\boxed{2}$ k, n を自然数とする。

(1)

$$\lim_{n\to\infty} n^{k-1}\left(\frac{1}{n^k + 1^k} + \frac{1}{n^k + 2^k} + \cdots + \frac{1}{n^k + n^k}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^k}$$

を示せ。

(2) $k = 1,\ 2,\ 3$ に対して，(1) の積分を求めよ。

$\boxed{3}$ 4次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^4$ の部分空間

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \;\middle|\; x + y + 3z = 0 \right\}$$

の正規直交基底を一組求めよ。また，W の直交補空間 $W^\perp$ を求めよ。

$\boxed{4}$ $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする。2次複素行列 X の複素共役を $\overline{X}$, 転置行列を ${}^tX$ として，${}^t\overline{X}X = E$ となるとき X をユニタリ行列という。以下，$\mathbf{i}$ は虚数単位とする。

(1) $0 \leq \theta < 2\pi$ に対し，行列 $(\sin\theta)A + (\cos\theta)B$ はユニタリ行列であることを示せ。

(2) 複素数 α と実数 b によって $\alpha A + bB$ の形で表されるユニタリ行列をすべて求め，その固有値を求めよ。

(3) $0 \leq \theta < 2\pi$ に対し，行列 $\mathbf{i}\,(\sin\theta)A + (\cos\theta)E$ はユニタリ行列であることを示せ。

(4) 複素数 α と実数 b によって $\alpha A + bE$ の形で表されるユニタリ行列をすべて求め，その固有値を求めよ。

$\boxed{5}$ n を整数とし，$n \geq 5$ とする。$X = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ を正 n 角形の頂点の集合とするとき，次の問いに答えよ。

(1) X の部分集合 $\{P_i, P_j, P_k\}$ で三角形 $P_iP_jP_k$ が直角三角形となるものは何個あるか。

(2) X の部分集合 $\{P_i, P_j, P_k\}$ で三角形 $P_iP_jP_k$ が二等辺三角形となるものは何個あるか。

(3) X の部分集合 $\{P_i, P_j, P_k\}$ で三角形 $P_iP_jP_k$ が鈍角三角形となるものは何個あるか。

(4) X の部分集合 $\{P_i, P_j, P_k, P_l\}$ で四角形 $P_iP_jP_kP_l$ が長方形となるものは何個あるか。

$\boxed{6}$ X_1, X_2 は独立な確率変数で，それぞれの確率分布が $[0, 1]$ 上の一様分布であるとする。また，$Y_1 = \max\{X_1, X_2\}, Y_2 = \min\{X_1, X_2\}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $0 \leq a \leq 1$ に対して，$P(Y_1 \leq a)$ を求め，Y_1 の密度関数を求めよ。

(2) Y_1 の期待値と分散を求めよ。

(3) $0 < a_1 < a_2 < b_1 < b_2$ を満たす実数 a_1, a_2, b_1, b_2 に対して

$$P(b_1 \leq Y_1 \leq b_2,\, a_1 \leq Y_2 \leq a_2)$$

を求め，(Y_1, Y_2) の同時密度関数を求めよ。

(4) Y_1 と Y_2 の相関係数を求めよ。

7 関数 $f(x)$ は，閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数とする。不等式

$$\left|\int_0^1 f(x)\sin\pi x\,dx\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\int_0^1 |f(x)|^2\,dx\right\}^{1/2}$$

が成立することを示せ。また，等号が成立するのは，どのようなときか。

8 (I) $f(z)$ は有理関数とする。複素関数 $F(z)$ は，$f(z)$ の零点や極ではない複素数 z に対して $F(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ により定義される関数とする。次の問いに答えよ。

(1) j を自然数とする。複素数 a が $f(z)$ の j 位の零点であるとき，a は $F(z)$ の極となることを示し，その位数を求めよ。

(2) k は自然数とする。複素数 b が $f(z)$ の k 位の極であるとき，b は $F(z)$ の除去可能な特異点であるか否かを答えよ。

(II) 複素平面上の原点中心，半径 2 の円周上の積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\frac{z^5+1}{z^6+6z+10}\,dz$$

を計算せよ。

9

(1) $0 < b < a$ とする。点 $(a,0,0)$ を中心とする半径 b の xz 平面内の円を z 軸のまわりに回転させて得られる曲面の助変数表示

$$P(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

を求めよ。

(2) (1) の曲面の曲面積 S を計算せよ。

$\boxed{10}$ p を素数とする。有理数体 $\mathbf{Q}$ の部分集合 R_1, R_2, R_3, R_4 を次のように定める。ただし，整数 a, b の最大公約数を $\gcd(a, b)$ で表す。

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; \gcd(a,b) = 1,\ a \text{ は } p \text{ で割り切れる} \right\} \\
R_2 &= \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; \gcd(a,b) = 1,\ b \text{ は } p \text{ で割り切れる} \right\} \\
R_3 &= \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; \gcd(a,b) = 1,\ a \text{ は } p \text{ で割り切れない} \right\} \\
R_4 &= \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; \gcd(a,b) = 1,\ b \text{ は } p \text{ で割り切れない} \right\}
\end{aligned}
$$

次の問いに答えよ。

(1) R_1, R_2, R_3, R_4 のうち，有理数体 $\mathbf{Q}$ の部分環になるものを，すべて求めよ。

(2) R_1, R_2, R_3, R_4 のうち，環になるものを R とする。R の単元，およびイデアルすべてを求めよ。

(3) (2) の環 R で素因数分解の一意性が成立するか否か答えよ。

なお，環とは乗法の単位元を含むものとする。