2008年2月

$\boxed{1}$ 次の主張はすべて誤りである。反例をあげて説明を加えよ。

(1) $\{f_n\}$ が $[0,1]$ 上の非負連続関数の単調減少列（つまり，$f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \cdots \geq 0$）とすると，$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ は $[0,1]$ で連続である。

(2) 0 を含む開区間で定義された微分可能な関数 $f(x), g(x)$ に対し，その区間で $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ であり，$\lim_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = a$ ならば，$\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = a$ である。

(3) $f(x)$ が $(0,\infty)$ 上で $f(x) > 0$ をみたす凸関数であり，$g(x)$ が $(0,\infty)$ 上の凸関数ならば，合成関数 $g(f(x))$ は $(0,\infty)$ 上の凸関数である。

$\boxed{2}$

(1) α を実数の定数とするとき，$\lim_{\varepsilon\to +0} \displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ を計算せよ。

(2) $\lim_{\varepsilon\to +0} \displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ が収束するような実数 α の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$ a, b, c を 0 でない実数の定数とし，x, y, z を未知数とする次の連立一次方程式を考える。

$$\begin{cases} ax + by + cz = a \\ bx + cy + az = b \\ cx + ay + bz = c \end{cases}$$

以下の問いに答えよ。

(1) 方程式が少なくとも 1 つの解をもつことを示せ。

(2) $a + b + c = 0$ のとき，方程式のすべての解を求めよ。

$\boxed{4}$ 実係数の２次以下の多項式のなすベクトル空間を V とし，V に内積を

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

で定める。

(1) $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ とする。$(f_1, f_3) = (f_2, f_3) = 0$ をみたす 0 でない $f_3 \in V$ を求めよ。

(2) １次以下の多項式 $f(x)$ で

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - x^2)^2 dx$$

が最小となるものを求めよ。

$\boxed{5}$ n を自然数として，$V = \{1, 2, \ldots, n\}$ とおく。$k \in V$ に対して

$$f(k) = \begin{cases} n + 1 - \dfrac{k+1}{2} & (k \text{ が奇数のとき}) \\ \dfrac{k}{2} & (k \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) f は V から V への全単射であることを示せ。

(2) f の逆写像 f^{-1} を求めよ。

(3) $f(k) = k$ をみたす $k \in V$ が存在するように n を定めよ。

$\boxed{6}$ ２枚のコインを同時に投げる。このとき，確率変数 X, Y を次で定義する。

$$X = \begin{cases} 1, & \text{１枚が表，もう１枚がうらのとき，} \\ 0, & \text{その他，} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{２枚ともに表のとき，} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

次の量を計算せよ。

(1) 条件付確率 $P(X=1|Y=0)$.

(2) X と Y の平均値 $\mathbf{E}[X]$ と $\mathbf{E}[Y]$.

(3) X と Y の共分散 $\mathrm{Cov}\,(X,Y)=\mathbf{E}[(X-\mathbf{E}[X])(Y-\mathbf{E}[Y])]$.

$\boxed{7}$ xy 平面にある曲線 C 上の任意の点 $P(x,y)$ における法線へ原点 $(0,0)$ から下ろした垂線の長さが，点 P の y 座標の絶対値に等しいという。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C は微分方程式

$$y^2-2xyy'-x^2=0$$

をみたすことを示せ。

(2) (1) の微分方程式を解いて，曲線 C の方程式を求めよ。

$\boxed{8}$ 複素数 a は $0<|a|<1$ とする。以下の問に答えよ。

(1) 複素数 z の関数

$$f(z)=\frac{1}{(z^2-2az+a^2)\left(z-\dfrac{1}{a}\right)}$$

の極とその位数を求めよ。

(2) 関数 f は (1) におけるものとし，複素平面上の曲線　$C\,:\,z=e^{i\theta}$ $(-\pi\leq\theta\leq\pi)$　上の積分 $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C (z-a)\,z\,f(z)\,dz$ を求めよ。

(3) a を実数で $0<|a|<1$ をみたすものとする。積分

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta}{\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-\cos\theta}\,d\theta$$

を求めよ。

$\boxed{9}$ 3次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 内の原点を中心とし，半径1の球面を

$$S^2 = \{(x, y, z) |\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 点 $P(x, y, z)$ と $N(0, 0, 1)$ を通る直線 $t(x, y, z) + (1 - t)(0, 0, 1)$ $(-\infty < t < \infty)$ と xy 平面との交点を $(\xi, \eta, 0)$ とする。ξ と η を x, y, z で表せ。

(2) 点 $P(x, y, z)$ が球面 S^2 上にあるとき，x, y, z を ξ, η で表示せよ。

(3) このことを用いて，$S^2 \setminus \{N\}$ が $\mathbf{R}^2$ と微分同相であることを示せ。

$\boxed{10}$ $\mathbf{R}$ は実数体を表し，$\mathbf{R}(x)$ は x を変数とする実数係数有理関数全体のなす体を表す。体 $\mathbf{R}(x)$ の $\mathbf{R}$ 上の自己同型写像 σ, τ を

$$\sigma(x) = 1 - \frac{1}{x}, \qquad \tau(x) = 1 - x$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1) $\sigma(x^2)$, $\sigma(x^3)$, $\sigma^2(x)$, $\sigma^3(x)$ を求めよ。

(2) σ の作用で不変な，定数でない有理関数を1つあげよ。

(3) σ, τ が生成する体 $\mathbf{R}(x)$ の自己同型群 $G =< \sigma, \tau >$ の位数を求めよ。

(4) (3) の群 G の作用で不変な，定数でない有理関数を1つあげよ。