２００８年８月

$\boxed{1}$　$a, b > 0$ とする．このとき次の問いに答えよ．

(1) $x > 0,\ p > 1$ のとき，$(x+1)^p > x^p + 1$ を示せ．

(2) $p > 1$ のとき，$(a+b)^p > a^p + b^p$ を示せ．

(3) $q > p > 0$ に対して，$(a^p + b^p)^{1/p} > (a^q + b^q)^{1/q}$ を示せ．

(4) $\displaystyle\lim_{p\to\infty}(a^p + b^p)^{1/p} = \max\{a, b\}$ を示せ．

$\boxed{2}$　次の問いに答えよ．ただし，x, y, z は実変数とする．

(1) $\displaystyle f(x,y) = \int_0^x e^{t^2+ty}dt$ とするとき，$\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle g(z) = \int_0^{2z+1} e^{t^2+tz}dt$ とするとき，$g'(0)$ を求めよ．

$\boxed{3}$　x_1, x_2, x_3, x_4 を実数とし，行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{bmatrix}$$

このとき次の問いに答えよ．

(1) A の行列式が $\displaystyle\prod_{1\le i<j\le 4}(x_j - x_i)$ であることを証明せよ．

(2) A が正則のとき，A^{-1} の $(4,4)$ 成分を求めよ．

(3) A が正則のとき，A^{-1} の $(4,1)$ 成分を求めよ．

$\boxed{4}$ n 次正方行列 W を

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

で定義する．次の問いに答えよ.

(1) 1 の原始 n 乗根 $\zeta = e^{2\pi i/n}$ に対し，$W \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^{n-1} \end{bmatrix}$ を ζ を用いて表せ.

(2) W のすべての固有値とそれらに対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) $n = 5$ のとき, $A = W + W^{-1}$ のすべての固有値とその重複度を求めよ.

$\boxed{5}$ 有限集合 A の元の個数を $|A|$ で表すことにする．有限集合 X の部分集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ に対して，以下の不等式を証明せよ.

(1) $\displaystyle \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \geq \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|.$

(2) $\displaystyle \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k|.$

$\boxed{6}$ 偏りのないコインを用いたコイン投げを考える．n 回目の試行において表が出たら 1，裏が出たら -1 を対応させる確率変数を X_n とし,

$$S_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$

とおく.

(1) S_n の平均値 $\mathbf{E}[S_n]$ と分散 $\mathbf{V}[S_n] = \mathbf{E}[(S_n - \mathbf{E}[S_n])^2]$ を求めよ．

(2) $n = 1, 2, \ldots$ として，確率 $P(S_{2n} = 0)$ を求めよ．

(3) スターリングの公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(ここで，$\sim$ は両辺の比が $n \to \infty$ のとき 1 に収束することを意味する) を用いて，

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, P(S_{2n} = 0)$$

の値を計算せよ．

$\boxed{7}$ n を自然数とし，複素関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right)^n$$

によって定める．

(1) $f(z)$ の $z = 0$ における留数を求めよ．

(2) 単位円周 $|z| = 1$ 上で $f(z)$ を線積分することにより，

$$I_n = \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^n d\theta$$

の値を求めよ．

$\boxed{8}$ A を n 次エルミート行列でその固有値は全て非負とする．また $e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{C}^n$ のエルミート内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に関する正規直交基底とする．

(1) s を $0 < s < 1$ を満たす実数の定数とし，$[0, \infty)$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^s$$

で定義する．$f(x)$ が凹関数（上に凸な関数）であることを示せ．

(2) s を $0 < s < 1$ を満たす実数の定数とし，$\alpha_1, \dots, \alpha_m$ を A の相異なるすべての固有値とする．そして，α_k に対応する固有空間への正射影を E_k とするとき，A^s を $A^s = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^s E_k$ で定義する．このとき，任意のベクトル v について

$$\langle v, Av \rangle^{1-s} \geq \langle v, A^{1-s} v \rangle$$

を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{s \to +0} \frac{x^{1-s} - x}{s} = -x \log x \ (x \geq 0)$ を用いて，

$$-\sum_{k=1}^{m} \langle e_k, Ae_k \rangle \log \langle e_k, Ae_k \rangle \geq -\sum_{k=1}^{m} \langle e_k, (A \log A) e_k \rangle.$$

を満たすことを示せ．ただし，$x = 0$ のとき $x \log x = 0$ と定め，$A \log A = \sum_{k=1}^{m} (\alpha_k \log \alpha_k) E_k$ とする．

$\boxed{9}$

(1) A を位相空間 X の部分集合とする．A の部分集合 U が A の開集合であることを，X の開集合 O が存在して，$U = A \cap O$ と表されることと定義する．この定義により，A が位相空間となることを示せ．

注意:　このとき，A を X の部分空間という．

(2) ３次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 E と D を次のように定める．

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ |x| \leq 1,\ |y| \leq 1,\ |z| \leq 1\}$$
$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

このとき，E と D は同相であることを示せ．

$\boxed{10}$ i を虚数単位とし，複素数 $z = a + bi$ (a, b は実数) の絶対値を $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ で定める．複素数 $a + bi$ のうちで a, b がともに整数であるものの全体を R とおく：

$$R = \{a + bi \mid a, b \text{ は整数}\}$$

以下の問いに答えよ．

(1) R は (通常の複素数の演算で) 環になることを示せ．

(2) $z_1 \in R, z_2 \in R, z_2 \neq 0$ に対し

$$z_1 = uz_2 + v \quad (|v| < |z_2|)$$

となる $u \in R, v \in R$ が存在することを示せ．

(3) $I \subset R$ をイデアルとすると，I は単項イデアルであること，すなわち $I = \{az \mid z \in R\}$ となる $a \in R$ が存在することを示せ．