２００９年３月

$\boxed{1}$　$f(x)$ を区間 $(0,1)$ 上で微分可能な実数値関数とする．このとき次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ が $(0,1)$ 上の凸関数であるとき，$a<b$ を満たす任意の $a,b\in(0,1)$ に対して
$$f'(a)\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le f'(b)$$
を示せ．

(2) $a<b$ を満たす任意の $a,b\in(0,1)$ に対して，(1) の右側の不等式
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le f'(b)$$
が成立するとき，$f(x)$ は $(0,1)$ 上の凸関数になることを示せ．

ただし，$f(x)$ が $(0,1)$ 上の凸関数であるとは，任意の $a,b\in(0,1)$ と $0<\lambda<1$ に対して，
$$f(\lambda a+(1-\lambda)b)\le\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$$
が成立することをいう．

$\boxed{2}$　a,b,c を実数の定数とし，$0<a<b$ とする．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int e^{cx}\cos x\,dx$ を求めよ．

(2) 累次積分 $\displaystyle\int_a^b\left(\int_0^\infty e^{-xy}\cos x\,dx\right)dy$ の値を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos x\,dx$ の値を求めよ．ただし，累次積分における積分の順序交換は証明なしに行ってよい．

$\boxed{3}$ 多項式 $a_{ij}(x)$ $(i, j = 1, \cdots, n)$ を

$$a_{ij}(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & (i = j), \\ x & (j = i + 1 \text{ または } i = j + 1), \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

により定義する．$a_{ij}(x)$ を (i, j) 成分とする n 次の正方行列の行列式を $f_n(x)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $n \geq 3$ に対して，$f_n(x)$ を $f_{n-1}(x)$ と $f_{n-2}(x)$ を用いて表せ．

(2) $n \geq 1$ に対して，$f_n(x)$ を求めよ．

$\boxed{4}$ 3次の正方行列

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

について次の問いに答えよ．

(1) $AX = XA$ を満たす行列 X は対角行列であることを示せ．

(2) $BX = XB$, $BY = YB$, $XY \neq YX$ を満たす行列 X, Y の例を挙げよ．

(3) $AX = XA$, $CX = XC$ を満たす行列 X は $aI + bB$（ただし a, b はスカラー）と表せることを示せ．

$\boxed{5}$　有限集合 A の元の個数を $|A|$ で表すことにする．n を正整数とし，$\Omega_n = \{1, 2, \ldots, 4n\}$, $H_n = \{A \mid A \subset \Omega_n,\ |A| = 2n\}$ とおく．

(1) H_n の部分集合 S が，条件

(*)　　S の相異なる任意の元 X, Y に対して，$|X \cap Y| = n$

を満たせば，$|S| \leq 4n - 1$ となることを示せ．

(2) H_2 の部分集合 S で，次の３条件を同時に満たすものを１つ挙げよ．

(i) $S \supset \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 2, 7, 8\}\}$

(ii) $|S| = 7$

(iii) 条件 (*) を満たす．

$\boxed{6}$　$0, 1, 2, 3$ の数字が書かれた４枚のカードが入った箱から無作為にカードを１枚取り出し，そのカードを箱に戻した後で，無作為にカードを１枚取り出す．最初と２回目に出た数字のうち大きい方を X，小さい方を Y として確率変数 X, Y を定める．ただし, 同じ数字が出たときは, X, Y をともにその同じ数字として定める．

(1) X, Y の同時確率分布表を書け．

(2) X の平均値 $\mathbf{E}(X)$ と分散 $\mathbf{V}(X)$ を求めよ．

(3) 条件付き確率 $P(X \geq 2 \,|\, Y = 1)$ を求めよ．

(4) X と Y は独立かどうか, 理由をつけて述べよ．

$\boxed{7}$ 　複素関数 $f(z)$ を $f(z) = \dfrac{1}{z^3+1}$ によって定義する．定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$ の値を I と書くとき，次の問いに答えよ．

(1) 複素平面における $f(z)$ の極とその点における留数の値をすべて求めよ．

(2) パラメータ表示 $z = e^{2\pi i/3} r$ $(0 < r < \infty)$ により与えられる積分路 C に対して複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を I によって表せ．

(3) I を求めよ．

$\boxed{8}$ 　$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して，$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 広義重積分 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} (1+|x|^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx_1dx_2$ の値を求めよ．

(2) f が $\mathbb{R}^2$ 上の実数値連続関数であって，ある正の実数 C とある定数 $\alpha \in [0,1)$ に対して，

$$|f(x)| \le C(1+|x|)^\alpha \quad (x \in \mathbb{R}^2)$$

を満たすとき，広義重積分 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} (1+|x|^2)^{-\frac{3}{2}} f(x)\,dx_1dx_2$ は収束することを示せ．

(3) f を $\mathbb{R}^2$ 上の有界な実数値連続関数とするとき，次の等式を示せ．

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{3}{2}}} f(y-x)\,dx_1dx_2 = 2\pi f(y) \quad (y \in \mathbb{R}^2)$$

$\boxed{9}$ a, b を 0 でない実定数とし，$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f を

$$f(u, v) = (au\cos v, bu\sin v, u^2)$$

で定義する．写像 f の像を X とするとき，次の問いに答えよ．

(1) X を図示せよ．

(2) X の各点での接平面の方程式を求めよ．

(3) X がコンパクトであるかどうか，理由もつけて答えよ．

$\boxed{10}$ p を奇素数とし p 個の元からなる有限体を $\mathbb{F}_p$ とする．2 次方程式 $X^2 + 1 = 0$ の $\mathbb{F}_p$ の代数的閉包における解の一つを i とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{F}_p$ のすべての元は $a^2 + b^2$ $(a, b \in \mathbb{F}_p)$ の形に表せることを示せ．

(2) i が $\mathbb{F}_p$ に入るための p についての必要十分条件を求めよ．

(3) i は $\mathbb{F}_p$ に入らないとし, $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p(i)$ とする．$a, b \in \mathbb{F}_p$ に対して以下の条件 (a), (b) は同値であることを示せ．

  (a) $a^2 + b^2$ は $\mathbb{F}_p^\times$ の生成元になる．

  (b) $a + bi$ は $\mathbb{F}^\times$ の生成元になる．

  ここで体 $\mathbb{K}$ に対し $\mathbb{K}^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ は $\mathbb{K}$ の乗法群である．