2010年3月

$\boxed{1}$ 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y) = 2x^2 + 4xy + y^4$ に対して次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の $\mathbb{R}^2$ における極値とそれを与える点をすべて求め, 極大か極小かを判定せよ.

(2) 領域 $D = \{(x,y) : 0 < x < 1, 0 < y < x^2\}$ 上の $f(x,y)$ の重積分

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy$$

の値を求めよ.

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$ の値を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\cos x}{x(\log x)^2}\,dx$ が収束することを示せ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\sin x}{\log x}\,dx$ が収束することを示せ.

$\boxed{3}$ 次の行列を直交行列で対角化せよ. また, 対角化する直交行列 P も求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{4}$ A を複素数を成分とする n 次正方行列とし, A^* を A の共役転置行列とする. また, n 次元複素ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に対して, $\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$ とする.

(1) $AA^* = A^*A$ ならば, 任意の n 次元複素ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\|A\boldsymbol{x}\| = \|A^*\boldsymbol{x}\|$ が成り立つことを示せ.

(2) 逆に，任意の n 次元複素ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\|A\boldsymbol{x}\| = \|A^*\boldsymbol{x}\|$ が成り立てば，$AA^* = A^*A$ となることを示せ.

$\boxed{5}$ ある大学には n 人の 1 年次学生がいて, m 個の講義が開講されている. どの学生も r 個の講義を受講し, どの講義にも s 人の受講生がいる. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $nr = ms$ が成り立つことを示せ.

(2) どの 2 人も少なくとも一つの共通の講義を受講しているとすると $n(n-1) \leq ms(s-1)$ が成り立つことを示せ.

(3) 受講者の集合が一致するような 2 つの異なる講義はないと仮定する. さらに, ある 2 人の学生がいて, その 2 人が共通に受講している講義がないとすると,

$$m \leq \binom{n-1}{s} + \binom{n-2}{s-1}$$

が成り立つことを示せ. ただし, $\binom{k}{j}$ は二項係数を表すものとする.

$\boxed{6}$ 表が出る確率が p $(0 < p < 1)$ であるコインを投げる試行を繰り返す. n 回目の試行において表が出れば $Z_n = 1$, n 回目の試行において裏が出れば $Z_n = 0$ とおいて確率変数列 $Z_1, Z_2, \ldots$ を定める. 自然数 $n \geq 1$ に対して, 表が n 回出るまでに要する試行の回数を T_n とする. つまり,

$$T_n = \min\{k \geq 1 : Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_k \geq n\}$$

とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 自然数 $j \geq 1$ に対して確率 $P(T_1 = j)$ を求めよ.

(2) T_1 の平均値 $\mathbf{E}[T_1]$ と分散 $\mathbf{V}[T_1]$ を求めよ.

(3) $j \geq 1, k \geq 1$ を自然数とする. 条件付き確率 $P(T_2 - T_1 = k | T_1 = j)$ を求めよ.

(4) T_1 と $T_2 - T_1$ が独立であることを示せ.

$\boxed{7}$

(1) 複素平面上の有理型関数 $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$ の極およびその留数をすべて求めよ.

(2) 次の定積分の値を求めよ.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx$$

$\boxed{8}$ $\mathbb{R}$ 上の C^1 級実数値関数 $f(x), g(x)$ が

$$f'(x) = f(x)g(x), \quad g'(x) = -(f(x))^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$
$$f(0) = 1, \ g(0) = 0$$

を満たすとき, 次の問いに答えよ.

(1) $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$ を示せ.

(2) $g(x)$ を x の式で表し, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x)$ および $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} g(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ を x の式で表せ.

$\boxed{9}$ $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ を, 行列式が正の 2 次実正方行列全体とする. すなわち,

$$\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ |A| > 0 \right\}$$

とする. ただし, $|A|$ は A の行列式を表す. 対応 $\Phi : A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto (a, b, c, d)$ により, $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ にユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ の部分空間としての位相を与える. このとき, 次を示せ.

(1) 像 $\Phi(\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R}))$ は $\mathbb{R}^4$ の開集合である.

(2) $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ の任意の元は対角成分がすべて正の上三角行列と行列式が 1 の直交行列の積として表される.

(3) $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ は弧状連結である.

$\boxed{10}$

(1) G を群とする. G の各元の位数が 1 または 2 ならば, G は可換群であることを示せ.

(2) $\mathbb{Z}$ を整数全体が加法についてなす群とする. $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への準同型写像をすべて求めよ.