2010年8月

$\boxed{1}$ $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ を定数とする. $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ が $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ を満たしながら変化するとき, $x^a y^b z^c$ の最大値を求めよ.

$\boxed{2}$

(1) $0 < t < 1$ を固定して, 関数 $y = x^{t-1}e^{-x}$ $(x > 0)$ のグラフの概形を描け.

(2) $0 < t < 1$ のとき, 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 x^{t-1}e^{-x}dx$ は収束することを示せ.

(3) $t > 0$ のとき, 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$ は収束することを示せ.

(4) (2),(3) より, 各 $t > 0$ に対して

$$f(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$$

が定義できる. このとき, $t > 0$ に対して, $f(t+1) = tf(t)$ が成り立つことを示し, $f(5)$ を求めよ.

$\boxed{3}$ 実行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & a & b \\ 2 & b & c \end{pmatrix}$ で定まる $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$$

を考える. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ が直交するなら, $f(\boldsymbol{x}),\ f(\boldsymbol{y})$ も必ず直交するとする. さらに $a < 0$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) (a, b, c) を求めよ.

(2) 行列 A を対角化せよ. 対角化するための直交行列も 1 つ求めよ.

$\boxed{4}$ V を 4 次元の実ベクトル空間とし，線形写像 $J : V \to V$ で,

$$J^2 = -\, I$$

を満たすものを考える．ここで，J^2 は合成写像 $J \circ J$，I は V の恒等写像を表す．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 線形写像 $J : V \to V$ は同型写像であることを示せ．

(2) $\mathbf{0}$ でない任意のベクトル $v_1 \in V$ に対して，ベクトル $v_1, J(v_1)$ は 1 次独立であることを示せ．また，ベクトルの組 $\{v_1, J(v_1)\}$ によって生成される V の部分空間を V_1 とおくとき，V_1 は J 不変部分空間，すなわち

$$J(V_1) \subset V_1$$

を満たすことを示せ．ただし，$\mathbf{0}$ は V の零ベクトルである．

(3) (2) で定めた V_1 に対して，V_1 に属さない任意のベクトル $v_2 \in V$ をとる．ベクトルの組 $\{v_2, J(v_2)\}$ によって生成される V の J 不変部分空間を V_2 とおく．このとき，

$$V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$$

であることを示せ．

(4) (2) および (3) によって定められる V の基底 $\{v_1, J(v_1), v_2, J(v_2)\}$ に関する J の表現行列 A を求めよ．

$\boxed{5}$ 正の整数 n に対して, $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ とおく．E を X_n の異なる 2 つの要素からなる集合の族とする．X_n の 3 つの要素からなる集合 $\{x, y, z\}$ が 存在して, $\{x, y\} \in E$, $\{y, z\} \in E$, $\{x, z\} \in E$ をみたすとき, E は三角形をもつという．三角形をもたないような E の要素の個数の最大値を e_n で表す．例えば, $e_3 = 2$ である．このとき, 次の問いに答えよ．

(1) e_4 を求めよ．

(2) $e_5 \geq 6$ が成り立つことを示せ．

(3) $n \geq 5$ のとき $e_n \leq e_{n-2} + n - 1$ が成り立つことを示せ.

$\boxed{6}$ 表が出る確率が p $(0 < p < 1)$ であるコインを投げる試行を繰り返す. n 回目の試行において, 表が出れば $Z_n = 1$, 裏が出れば $Z_n = 0$ とおいて確率変数列 $Z_1, Z_2, \ldots$ を定め,

$$X_n = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

とおく. 次に, 自然数 $k \geq 1$ に対して,

$$T_k = \inf\{n \geq 1 \mid X_n \geq k\}$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) $n = 1, 2, \ldots$ に対して確率 $P(T_2 = n)$ を求めよ.

(2) T_2 の平均値 $\mathbf{E}[T_2]$ を求めよ.

(3) k, m, n を $k \geq 3$, $n < m$ を満たす自然数とするとき, 条件付き確率 $P(T_k = m | T_2 = n)$ を二項係数を用いて表せ.

$\boxed{7}$ i を虚数単位とし，複素平面上の有理型関数 f を $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$ により定める．以下の問いに答えよ．

(1) $r > 0$ に対して，$|f(re^{i\theta})|$ の $0 \leq \theta \leq \pi$ における最大値を $M(r)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{r \to +\infty} r^2 M(r) = 0$ であることを示せ．

(2) 上半平面 $\mathrm{Im}\, z > 0$ における $f(z)$ の極およびその点での留数をすべて求めよ．

(3) 定積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\, dx$ の値を求めよ．

$\boxed{8}$ $[-\pi,\pi]$ 上の実数値連続関数を成分にもつ 2 次の正方行列全体からなる集合を V とする. すなわち

$$V = \left\{ A(\theta) = \begin{pmatrix} a_{11}(\theta) & a_{12}(\theta) \\ a_{21}(\theta) & a_{22}(\theta) \end{pmatrix} : \right.$$
$$\left. a_{ij}\ (i,j=1,2) \text{ は } [-\pi,\pi] \text{ 上の実数値連続関数} \right\}$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $A(\theta)$, $B(\theta) \in V$ に対して

$$(A,B) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{tr}(A(\theta)^t B(\theta))\, d\theta$$

とおくとき，これが実ベクトル空間 V における内積となることを示せ．ただし，$A(\theta)^t$ は $A(\theta)$ の転置行列を，$\mathrm{tr}(A(\theta))$ は $A(\theta)$ のトレースを表す．

(2) 非負の整数 n に対して

$$O_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$$

とおく．このとき，任意の非負の整数 m,n に対して $(O_m, O_n) = \delta_{mn}$ であることを示せ．ここで，δ_{mn} はクロネッカーのデルタの記号である．

(3) $A(\theta) \in V$ を固定し, $(n+1)$ 個の実数 $a_0, a_1, \dots, a_n$ に対して

$$Q(a_0, a_1, \dots, a_n) = (A - \sum_{k=0}^{n} a_k O_k, A - \sum_{k=0}^{n} a_k O_k)$$

と定める．$Q(a_0, a_1, \dots, a_n)$ が最小となるのは, 各 $k = 0, 1, \dots, n$ に対して $a_k = (A, O_k)$ となるときであることを示せ．

$\boxed{9}$ (X,d) を距離空間とし, $C \subset X$ を空でない閉集合とする. 関数 $f : X \to \mathbb{R}$ を次で定義する.

$$f(x) = \inf\{d(x,y) \mid y \in C\} \quad (x \in X)$$

このとき, 次の問いに答えよ.

(1) f は連続であることを示せ.

(2) $f(x) = 0$ と $x \in C$ は同値であることを示せ.

$\boxed{10}$ K を体, U を K 上の有限次元ベクトル空間とし, V_1, V_2, V_3 を U の部分空間とする.

(1) U の部分空間 V が和集合 $V_1 \cup V_2$ に含まれるとき, $V \subset V_1$ または $V \subset V_2$ となることを示せ.

(2) K を実数体とする. U の部分空間 V が和集合 $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ に含まれるとき, $V \subset V_1$ または $V \subset V_2$ または $V \subset V_3$ となることを示せ.

(3)「U の部分空間 V が $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ に含まれるとき, $V \subset V_1$ または $V \subset V_2$ または $V \subset V_3$ となる」という命題は, すべての体 K とすべての有限次元ベクトル空間 V_j $(j = 1, 2, 3)$ に対して成り立つか. 成り立つときはその証明を, 成り立たないときは反例 (体 K と部分空間 V, V_1, V_2, V_3 の例) をあげよ.