2011年 8月

$\boxed{1}$ n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の通常の内積 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ に関して，部分空間 W の直交補空間 $W^\perp$ を

$$W^\perp = \{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n : \text{任意の } \boldsymbol{v}\in W \text{ に対して } \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0\}$$

で定義する.

(1) $\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k\}$ を部分空間 W の正規直交基底，$\{\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_l\}$ を部分空間 $W^\perp$ の正規直交基底とするとき，$\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_l\}$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底になることを示し，$\dim W^\perp = n-\dim W$ が成り立つことを示せ.

(2) 部分空間 W に対して $(W^\perp)^\perp = W$ が成り立つことを示せ.

(3) 部分空間 W_1, W_2 に対して $(W_1+W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$ が成り立つことを示せ.

(4) 部分空間 W_1, W_2 に対して $(W_1\cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$ が成り立つことを示せ.

$\boxed{2}$ 3次以下の実係数多項式全体のなすベクトル空間

$$V = \{f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}\}$$

に対して，

$$W = \left\{f(x)\in V : \int_0^1 f(x)dx = 0\right\}$$

とおく．また定数 $a,b\in\mathbb{R}$ に対し，線形写像 $T:V\longrightarrow V$ を

$$(Tf)(x) = f(ax+b)$$

で定義する.

(1) 部分集合 W は V の部分ベクトル空間であることを示せ.

(2) W の基底を1組求めよ.

(3) T の W への制限 $T|_W$ が，W から W への線形写像になるような定数 a,b を求めよ．ただし，$(a,b)\neq(1,0)$ とする.

(4) (3) で求めた a, b に対し，$T|_W$ の (2) で求めた基底に関する表現行列を求めよ．

$\boxed{3}$ p, q を，$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たす正の実数とする．

(1) A, B を正の実数とするとき，任意の正の実数 t に対して

$$A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}} \leq \frac{A}{p} t^p + \frac{B}{q} t^{-q}$$

が成り立つことを示せ．また，どのような t について等号が成立するか答えよ．

(2) $2n$ 個の正の実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ に対して

$$x_1^{\frac{1}{p}} y_1^{\frac{1}{q}} + x_2^{\frac{1}{p}} y_2^{\frac{1}{q}} + \cdots + x_n^{\frac{1}{p}} y_n^{\frac{1}{q}} \leq (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^{\frac{1}{p}} (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)^{\frac{1}{q}}$$

を示せ．

$\boxed{4}$ a を実定数とし，平面 $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + \sin^2 y)^a & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

を考える．

(1) f が $\mathbb{R}^2$ 上で連続的微分可能，すなわち，f が偏微分可能でかつ f の偏導関数が連続であるための a に関する必要十分条件を求めよ．

(2) 積分

$$\iint_{0 < x^2 + y^2 \leq 1} f(x, y)\, dx dy$$

が収束するための a に関する必要十分条件を求めよ．

$\boxed{5}$ $\mathbb{Z}$ を整数全体の集合とする．X を n 個の要素からなる有限集合とし，f を X から $\mathbb{Z}$ への写像とする．

(1) f が定値写像でないとき，次の不等式を示せ．

$$\sum_{x, y \in X} (f(x) - f(y))^2 \geq 2n - 2.$$

(2) (1) で等号が成り立つとき，集合

$$\{\, |f^{-1}(\{k\})| : k \in \mathbb{Z} \,\}$$

を求めよ．ただし，$|Y|$ は集合 Y の要素の個数を表す.

$\boxed{6}$ X を区間 $[0,1]$ 上の一様分布に従う確率変数とする．つまり，

$$P(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx, \qquad f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \text{ のとき}, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

が成り立つとする.

(1) X の平均値 $\mathbf{E}[X]$ と分散 $\mathbf{V}[X]$ を求めよ.
(2) Y を X と同じ分布をもち, X と独立な確率変数とする．このとき, $Z = X + Y$ と $Z' = X - 2Y$ の共分散

$$\mathbf{Cov}(Z, Z') = \mathbf{E}[(Z - \mathbf{E}[Z])(Z' - \mathbf{E}[Z'])]$$

を求めよ.
(3) (2) で定義した確率変数 Z の分布関数 $F_Z(t) = P(Z \le t)$ と確率密度関数 $f_Z(x)$ を求めよ.

$\boxed{7}$ $\mathbb{R}$ 上で微分可能な関数の列 $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は微分方程式

$$y_n'(x) = n\, y_n(x)(1 - y_n(x)) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad y_n(0) = \frac{1}{2}$$

を満たすものとする.

(1) $y_n(x)$ を x と n の式で表せ.
(2) $\varphi(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の有界かつ連続な可積分関数とするとき，次の等式を示せ.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_n(x)\,\varphi(x)dx = \int_{0}^{\infty} \varphi(x)dx, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_n'(x)\,\varphi(x)dx = \varphi(0).$$

$\boxed{8}$ 関数 $f(z) = \dfrac{\cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)}$ について以下の問に答えよ.

(1) 関数 $f(z)$ の複素平面におけるすべての極およびその留数を求めよ．
(2) n を自然数として，複素積分

$$I_n = \int_{C_n} f(z)dz$$

の値を求めよ．ただし，ここで C_n は円周 $|z| = n + \frac{1}{3}$ を反時計回りに向きづけたものとする．

$\boxed{9}$

X を空でない位相空間とし，下記の性質 $(*)$ をみたすものとする．

$(*)$　X の任意の点 x に対して，x の開近傍 U_x および 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の開集合 V_x が存在して，U_x と V_x は同相である．

(1) X の点 p に対し，p と連続な弧で結ぶことができる X の点全体を X_p とする．すなわち

$$\begin{aligned} X_p =& \{q : q \in X,\ \text{連続写像}\ \gamma : [0,1] \to X\ \text{が存在して},\\ &\gamma(0) = p,\ \gamma(1) = q\}. \end{aligned}$$

このとき，X_p は X の開集合であることを示せ．
(2) X が連結であれば，X は弧状連結であることを示せ．

$\boxed{10}$　i を虚数単位とし，複素数の集合 R を

$$R = \{a + bi : a\ \text{は整数},\ b\ \text{は偶数}\}$$

で定める．

(1) R は複素数体の部分環であることを示せ．
(2) R の単元 (逆元を R の中にもつ R の元) をすべて求めよ．
(3) R の元 α が単元でなく，α 自身か単元でしか割り切れないとき α を既約元という．$\{17, 19, 3 + 4i\}$ の中で既約元はどれか．理由とともに答えよ．