2012年 2月

$\boxed{1}$ 実 4 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．
(2) A を直交行列で対角化せよ．対角化するための直交行列も 1 つ求めよ．

$\boxed{2}$ a, b を実数として，

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

とおく．

(1) ベクトルの組 $\{v_1, v_2, v_3\}$ が $\mathbb{R}^3$ の基底になるための条件を求めよ．
(2)
$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$$
で定義される写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は線形であることを示せ．
(3) (1) の条件下で，(2) の写像 f の基底 $\{v_1, v_2, v_3\}$ による表現行列を求めよ．

$\boxed{3}$ 関数 $\arctan x$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$ を示せ．

(2)

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$$

を示せ．

(3) 任意の $a \in (-1, 1)$ に対して

$$\arctan a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{2n+1}$$

を示せ．

$\boxed{4}$ $D = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$ とする．m を実数とするとき，広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^m}$ の収束・発散を調べ，収束するときはその値を求めよ．

$\boxed{5}$ 有限集合 Z の元の個数を $|Z|$ で表す．有限な全体集合 X の部分集合 A に対して，X における A の補集合を A^c で表す．X のべき集合，すなわち X の部分集合全体の集合を 2^X で表す．d を

$$d(A, B) = \min\{|A \cup B| - |A \cap B|, |A \cup B^c| - |A \cap B^c|\}$$

で定義された $2^X \times 2^X$ 上の関数とする．関数 d の最大値，最小値をそれぞれ $d_{\max}, d_{\min}$ とする．

(1) $d_{\min}$ を求めよ．

(2) $d(A, B) = d_{\min}$ となるための A, B の条件を求めよ．

(3) $d_{\max}$ を求めよ．

$\boxed{6}$ U_1, U_2 を $[0,1]$ 上の一様分布に従う独立な確率変数として，

$$X = \max\{U_1, U_2\}, \quad Y = \min\{U_1, U_2\}$$

とおく．ただし, $\max\{a,b\}$ は a,b の最大値，$\min\{a,b\}$ は a,b の最小値を表す.

(1) すべての実数 x に対して，

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

を満たす関数 f_X (X の確率密度関数) を求めよ.

(2) X の平均値 $\mathbf{E}[X]$ と分散 $\mathbf{V}[X]$ を求めよ.

(3) $0 \leq x \leq 1$ と $0 \leq y \leq 1$ に対して， $P(X \leq x, Y \leq y)$ を求めよ.

(4) X, Y の相関係数

$$r = \frac{\mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]}{\sqrt{\mathbf{V}[X]\mathbf{V}[Y]}}$$

を計算せよ.

$\boxed{7}$ 2 階常微分方程式

(*) $$x''(t) = t\,x(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

を級数解法によって解くことを考える.

(1) $x(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ が (*) を満たすとき，係数 a_n が満足すべき漸化式を求めよ.

(2) (*) の解 $x(t)$ が $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ を満たすとき，

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{2}{3})t^{3n}}{9^n n! \Gamma(n + \frac{2}{3})}$$

が成立つことを示せ．ただし，$\Gamma(s)$ はガンマ関数である.

$\boxed{8}$ 関数 $f(z) = \dfrac{z^2}{e^z - 1}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(z)$ は原点を除去可能特異点として持つことを示せ．また，$f(z)$ の原点のまわりのベキ級数展開を $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots$ とするとき，最初の 5 項の係数 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 を求めよ．

(2) 関数 $f(z)$ の複素平面におけるすべての極およびその留数を求めよ．

(3) C を円周 $|z| = 10$ に反時計回りに向きづけたものとし，複素積分

$$I = \int_C f(z)dz$$

の値を求めよ．

$\boxed{9}$ S^2 を 2 次元球面

$$S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

とする．また，関数 $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$h(y) = y_1^2 + 2y_2^2 \qquad \bigl(y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \bigr)$$

で与える．

(1) 点 $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ における h の偏微分係数の組 $\bigl(\dfrac{\partial h}{\partial y_1}(y), \dfrac{\partial h}{\partial y_2}(y)\bigr)$ に対して，このベクトルとの内積がゼロ，すなわち

$$\bigl(\frac{\partial h}{\partial y_1}(y), \frac{\partial h}{\partial y_2}(y)\bigr) \cdot (u_1, u_2) = 0$$

となるようなベクトル $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ をすべて求めよ．

(2) $f : S^2 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とし，$p \in S^2$ を f の最大値を与える点とする．このとき，任意の接ベクトル $X \in T_pS^2$ に対して

$$df_p(X) = 0$$

となることを示せ．ただし，$df_p : T_pS^2 \to T_{f(p)}\mathbb{R}$ は $p \in S^2$ における写像 f の微分を表す．

(3) $\varphi : S^2 \to \mathbb{R}^2$ を C^∞ 級写像とする．また，$q \in S^2$ を，関数 $h \circ \varphi : S^2 \to \mathbb{R}$ の最大値を与える点とする．このとき

$$\dim\{X \in T_qS^2 \mid d\varphi_q(X) = 0\} \geq 1$$

となることを示せ．ただし，$d\varphi_q : T_qS^2 \to T_{\varphi(q)}\mathbb{R}^2$ は $q \in S^2$ における写像 φ の微分を表す.

$\boxed{10}$ G を群とする.

(1) H, K が G の指数有限の部分群であれば，$H \cap K$ も G の指数有限の部分群であることを示せ.

(2) G が，G 以外の指数有限の部分群をもてば，G は G 以外の指数有限の正規部分群をもつことを示せ.

(3) 整数環 $\mathbb{Z}$ を加法での群とみなす．$\mathbb{Z}$ の指数有限の部分群をすべて求めよ.

(4) 有理数体 $\mathbb{Q}$ を加法での群とみなす．$\mathbb{Q}$ の指数有限の部分群をすべて求めよ.