2012年8月

$\boxed{1}$ $M_2(\mathbb{R})$ を 2 次実正方行列全体のなすベクトル空間とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 写像 $L : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を

$$L(X) = \mathrm{Tr}(AX) \qquad (AX \text{ のトレース})$$

とし, $M_2(\mathbb{R})$ の部分集合 W を

$$W = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid L(X) = 0\}$$

により定める．また, 写像 $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ を

$$T(X) = {}^t X \qquad (X \text{ の転置})$$

とする．このとき, 次の問いに答えよ．

(1) L は線形写像, および W は $M_2(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間であることを示せ．

(2) T の W への制限 $T|_W$ は, W 間の線形写像であることを示せ．

(3) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & c \end{pmatrix} \right\}$ が W の基底となるように, 実数 a, b, c を定めよ．

(4) (3) で定めた a, b, c に対して, 基底 $\mathcal{B}$ に関する $T|_W$ の表現行列を求めよ．

$\boxed{2}$ a, b を実数とし, $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ とする．

(1) A を直交行列を用いて対角化せよ．

(2) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して, ${}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x} \geq 0$ となるための a, b に関する必要十分条件を求めよ．

$\boxed{3}$ a, b を実定数として，平面内の領域 D を

$$D = \{(x, y) \mid x > 0,\ y > x^a\}$$

によって定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = 1$ を示せ．ただし $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan x < \dfrac{\pi}{2}$ である．

(2) 広義積分

$$I = \iint_D \frac{x^2 e^{-bx}}{x^2 + y^2} dx dy$$

が収束するような a, b の条件を求めよ．

(3) $a = b = 1$ とするとき，前問における I の値を（$+\infty$ も許容して）求めよ．

$\boxed{4}$ $f(x)$ を区間 $[0, \infty)$ 上の実数値連続関数とする．$f(x)$ は区間 $[0, \infty)$ 上単調非増加であり，

$$\lim_{T \to \infty} \int_0^T f(x)\ dx = +\infty$$

を満たすとする．数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定める．

(1) 任意の $x \geq 0$ に対して $f(x) > 0$ であることを証明せよ．

(2) 次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\int_1^{n+1} f(x)\ dx \leq a_n \leq \int_0^n f(x)\ dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{\int_1^n f(x)\ dx}$ を求めよ．

$\boxed{5}$ n を正の整数，$F=\{0,1,2,3,4\}$ とする．写像 $d: F^n \times F^n \to \mathbb{Z}$ を

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = |\{i \mid 1 \le i \le n,\ x_i \ne y_i\}|$$

で定義する．ここで，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in F^n$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in F^n$ であり，$|S|$ は有限集合 S の要素の個数を表す．

(1) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in F^n$ に対して，$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\ge d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$ が成り立つことを示せ．

(2) $1\le k\le n$ とし，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= (0,0,\ldots,0)\in F^n,\\ \boldsymbol{y} &= (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n-k},\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k})\in F^n\end{aligned}$$

とするとき, $|\{\boldsymbol{z}\in F^n | d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=1\}|$ と $|\{\boldsymbol{z}\in F^n | d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})=k, d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=1\}|$ を求めよ．

(3) 前問の $k,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ に対して,

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})=d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})=k,\ d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{w})=1,\ d(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})=2$$

をみたす組 $(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\in F^n\times F^n$ の個数を求めよ．

$\boxed{6}$ 単位円板 $\Omega=\{(u,v)\mid u^2+v^2\le 1\}$ 上に一様分布を与え, それにしたがって点 A を Ω から取り出し, A の座標を $(R\cos\Theta, R\sin\Theta)$ で表す. ただし, $0\le R\le 1$, $0\le\Theta<2\pi$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) すべての $x\in(-\infty,+\infty)$ に対して,

$$P(R\le x)=\int_{-\infty}^{x} f_R(t)dt$$

を満たす関数 (R の確率密度関数) f_R を求めよ.

(2) R の平均値 $\mathbf{E}[R]$ と分散 $\mathbf{V}[R]$ を求めよ.

(3) $0\le x\le 1$ と $0\le y<2\pi$ に対して, 条件付き確率 $P(R\le x|\Theta\le y)$ を求めよ.

(4) 2 つの確率変数 R, Θ は独立か否かを理由をつけて答えよ.

$\boxed{7}$ α を正の実定数とし，常微分方程式の初期値問題

$$y' = -\frac{y}{(1-x)^{\alpha}} \quad (0 < x < 1), \quad y(0) = 1$$

の解を $y = f(x)$ とする.

(1) $f(x)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 1-0} f'(x)$ を求めよ.

(3) すべての非負整数 n に対して, $\displaystyle\lim_{x \to 1-0} f^{(n)}(x) = 0$ が成り立つような実数 α の条件を求めよ. ただし, $f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の n 次導関数を表し, $f^{(0)}(x) = f(x)$ とする.

$\boxed{8}$ n を与えられた自然数とし，a を $0 < a < 1$ をみたす定数とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) 複素平面上の有理型関数

$$f(z) = \frac{z^n}{1 - a(z + z^{-1}) + a^2}$$

のすべての極とその点における留数を求めよ.

(2) 前問における関数 $f(z)$ に対して，積分

$$I = \int_C f(z)dz$$

の値を求めよ．ただし，C は単位円周 $|z| = 1$ を反時計回りに向き付けたものとする.

(3) 定積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 5\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta$$

の値を求めよ.

$\boxed{9}$ 2次元複素数空間 $\mathbb{C}^2$ 上に距離 $d(z,w)$ を

$$d(z,w) = \sqrt{|z_1 - w_1|^2 + |z_2 - w_2|^2}\ , \quad z = (z_1, z_2),\ w = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$$

で定義し，$\mathbb{C}^2$ には $d(z,w)$ の定める距離位相を導入する．また $z = (z_1, z_2)$, $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$ に対して，同値関係 $z \sim w$ を

$$(z_1, z_2) = (w_1, w_2) \quad \text{または} \quad (z_1, z_2) = (w_2, w_1)$$

で定義し，商空間 $\mathbb{C}^2/\sim$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 写像 $\varphi\ :\ \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$, $(z_1, z_2) \mapsto (z_1 + z_2, z_1 z_2)$ に対して，$\widetilde{\varphi} \circ P = \varphi$ を満たす写像 $\widetilde{\varphi}\ :\ \mathbb{C}^2/\sim\ \longrightarrow \mathbb{C}^2$ が一意的に存在することを示せ．ここで，P は自然な射影 $P\ :\ \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2/\sim$ を表す．

(2) $\widetilde{\varphi}$ は連続写像であることを示せ．

(3) $\mathbb{C}^2$ と $\mathbb{C}^2/\sim$ は同相であることを示せ．

$\boxed{10}$ 5個の元からなる有限体を F_5 で表す. X を不定元とし, $a, b \in F_5$ に対し,

$$f_{a,b}(X) = X^2 + aX + b$$

とおく.

(1) 各 $a \in F_5$ に対し, $f_{a,b}(X)$ が F_5 上既約となる $b \in F_5$ が丁度 2 つ存在することを示せ.

(2) F_5 上既約となる $f_{a,b}(X)$ をすべて求めよ.

(3) (2) で求めた $f_{a,b}(X)$ すべての積を単項式の和の形に表せ.