2013年8月

$\boxed{1}$ 以下の対称行列 A と4次元ベクトル $\boldsymbol{e}$ を考える：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a & a \\ a & 0 & a & a \\ a & a & 0 & a \\ a & a & a & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ただし，a は 0 でない実数とする.

(1) A の固有値とその重複度を求めよ.

(2) $\boldsymbol{e}$ を A の固有ベクトルの和で表せ.

(3) 正の整数 n に対して, $A^n\boldsymbol{e}$ を求めよ.

$\boxed{2}$ $n = 1, 2, \ldots$ に対して, $\mathbb{R}$ 上の関数 f_n を

$$f_n(x) = \begin{cases} n - n^2|x| & \left(-\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}\right), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で定義する. 次の問いに答えよ.

(1) $m = 1, 2, \ldots$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} x^m f_n(x) dx = 0$$

を証明せよ.

(2) 任意の多項式 $p(x)$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} p(x) f_n(x) dx = p(0)$$

を証明せよ.

(3) φ を $[-1,1]$ 上の連続関数とする．φ が多項式で一様近似できることを用いて,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\varphi(x)f_n(x)dx=\varphi(0)$$

を証明せよ.

$\boxed{3}$ $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 S を

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,0\leq y\leq 2x,\ z=4-x^2,\ z\geq 0\}$$

で定める．

(1) S を図示せよ．

(2) S の曲面積を求めよ．

(3) S と曲面

$$y=\frac{4}{3}x^{3/2}$$

との交わりがなす曲線の長さを求めよ．

$\boxed{4}$ n,q を 2 以上の整数とし, N,Q をそれぞれ n 個, q 個の要素からなる有限集合とする．N の部分集合と, その部分集合から Q への写像の組全体のなす集合を X とする．すなわち,

$$X=\{(A,f)\,|\,A\subseteq N,\ f:A\to Q\}$$

とする．$(A,f),(B,g)\in X$ について, $A\subseteq B$ かつ任意の $x\in A$ に対して $f(x)=g(x)$ が成り立つとき, $(A,f)\preceq(B,g)$ と書くことにする．なお, 有限集合 S の要素の個数を $|S|$ で表す.

(1) $0\leq r\leq s\leq n$ とし, $(A,f),(B,g)\in X$ が $(A,f)\preceq(B,g)$, $|A|=r$, $|B|=n$ を満たすとき,

$$\Big|\{(C,h)\in X\,|\,(A,f)\preceq(C,h)\preceq(B,g),\ |C|=s\}\Big|$$

を n,r,s で表せ.

(2) $0 \leq r \leq n$ とし, $(A,f) \in X$ が $|A| = r$ を満たすとき,

$$\left|\{(C,h) \in X \mid (A,f) \preceq (C,h),\ |C| = n\}\right|$$

を n, q, r で表せ.

(3) $0 \leq j \leq r \leq n,\ 0 \leq s \leq n$ とし, $(A,f),(B,g) \in X$ が $|A| = r$, $|B| = n$, $\left|\{x \in A \mid f(x) = g(x)\}\right| = j$ を満たすとき,

$$\left|\left\{ \big((C,h),(D,k)\big) \in X \times X \;\middle|\; \begin{array}{l} (C,h) \preceq (B,g),\ (C,h) \preceq (D,k), \\ (A,f) \preceq (D,k),\ |C| = s,\ |D| = n \end{array} \right\}\right|$$

を n, q, r, s, j で表せ.

$\boxed{5}$ 確率変数 X はパラメータ $\lambda > 0$ の指数分布に従うものとする. すなわち, $0 \leq \alpha < \beta$ に対して,

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_\alpha^\beta \lambda e^{-\lambda x} dx$$

が成り立つ. 次の問いに答えよ.

(1) X の平均値 $\mathbf{E}[X]$ と分散 $\mathbf{V}[X]$ を求めよ.

(2) $a > 0,\ b > 0$ を定数とするとき, $P(X > a + b | X > a) = P(X > b)$ が成り立つことを示せ. ただし, $P(A|B)$ は条件 B の下での A の条件付き確率を表す.

(3) 確率変数 Y を

$$Y = \begin{cases} [X] & (X \geq 0), \\ 0 & (X < 0) \end{cases}$$

で定義する. ただし, 実数 x に対して, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す. 確率変数 Y の平均値 $\mathbf{E}[Y]$ を計算せよ.

$\boxed{6}$ 実数値関数 $x = x(t),\ y = y(t)\ (t \in \mathbb{R})$ に対して, 次の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} x' = \cos y, \\ y' = -\sin x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = a, \\ y(0) = \frac{\pi}{2} - a, \end{cases}$$

ただし，a は $0 < a < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とする．解 $x(t),\ y(t)$ に対して, 関数 $f = f(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ を次で定める．

$$f(t) = x(t) + y(t)$$

(1) f が満たす 2 階の微分方程式を求めよ．

(2) $f(0)$ および $f'(0)$ の値を求めよ．

(3) $f(t)$ を求めよ．

(4) $x(t),\ y(t)$ を求めよ．

$\boxed{7}$ 複素平面上の有理型関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)(1+z^4)}$$

によって定義する．

(1) 上半平面 $\mathrm{Im}\, z > 0$ 上にある $f(z)$ の極とその点における留数をすべて求めよ．

(2) 関数 $f(z)$ の $z = 0$ におけるベキ級数展開を求めよ．

(3) 次の定積分の値を求めよ：

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^4)}$$

$\boxed{8}$ 距離空間 (X, d) から n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ への連続写像 f を考える．$\mathbb{R}^n$ の任意のコンパクト部分集合 K に対して，f による逆像 $f^{-1}(K)$ がつねに X のコンパクト部分集合になるとき，f は固有写像と呼ばれる．次の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への固有写像の例を一つ挙げよ．

(2) $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への連続写像であって，固有写像でない例を一つ挙げよ．

(3) 距離空間 (X,d) の任意の点 $p \in X$ と任意の正数 $r>0$ に対して，対応する閉球体

$$B_r(p) = \{q \in X \mid d(p,q) \leq r\}$$

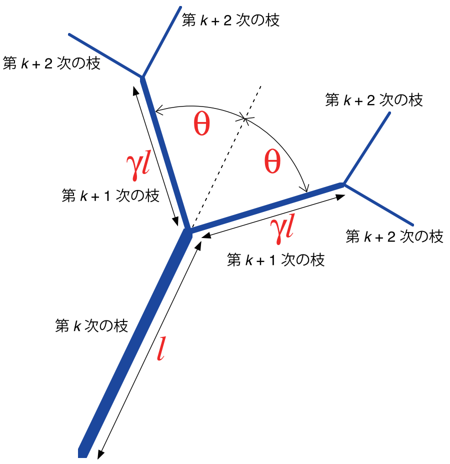
がつねにコンパクトであるとする．このとき，距離空間 (X,d) は完備であることを示せ．

(4) 距離空間 (X,d) から $\mathbb{R}^n$ への固有写像 f が存在して，任意の点 $p,q \in X$ に対して，

$$|f(p) - f(q)| \leq d(p,q)$$

を満たしているとする．ただし，$|\cdot|$ はユークリッドノルムを表す．このとき，距離空間 (X,d) は完備であることを示せ．

$\boxed{9}$ 気道分枝構造や樹木導管構造などの二分枝の繰り返しによる分枝構造の数理モデルとして，次の２次元平面内の二分枝構造形成モデルを考える：



このモデルは以下の仮定を満たす．

- 第 0 次の枝は 1 本であり，その長さを l_0 $(l_0 > 0)$ とする．
- 第 k 次の枝の先からは対称に 2 本の第 $(k+1)$ 次の枝が分かれる．それらはもとの第 k 次の枝と角 θ $(0 < \theta \leq 90°)$ をなす．
- 第 $(k+1)$ 次の枝の長さは第 k 次の枝の長さの γ 倍とする．ただし，$0 < \gamma \leq 1$ とする．

以下，枝の太さは無視する．２本の枝がそれらの端点以外の共有点をもつとき，これらの枝は重なるという．次の問いに答えよ．

(1) $\theta = 90^\circ$ のとき，第５次の枝において，他の第５次以下の枝との重なりが生じるための条件を求めよ．

(2) $\theta = 90^\circ$ のとき，すべての枝において，他の枝との重なりが生じないための条件を求めよ．

(3) 次の (A)，(B) のいずれかに答えよ．

(A) この数理モデルにおいて，$\theta \neq 90^\circ$ の場合において，枝が重ならないための条件を求める方針について述べよ．(具体的に条件を求める必要はない)

(B) 生物のこのような分枝構造が，枝が重複しないように形成されているとすると，その理由をどのように考えうるかについて述べよ．(特定の具体的な分枝構造を挙げて述べてもよい)

$\boxed{10}$ S_3 を 3 次対称群とし, T を S_3 の位数 2 の元全体の集合とする. $a \in S_3$ に対して, 写像 $\varphi_a : S_3 \to S_3$ を $\varphi_a(g) = aga^{-1}$ で定める. S_3 の自己同型群を G とする.

(1) S_3 が T で生成されることを証明せよ.

(2) $f \in G$ に対して, $f(T) = T$ を証明せよ.

(3) $\varphi_a \in G$ を証明せよ.

(4) 写像 $S_3 \to G$, $a \mapsto \varphi_a$ が単射準同型であることを証明せよ.

(5) G と S_3 が同型であることを証明せよ.