2014年3月

$\boxed{1}$ $n = 1, 2, \ldots$ に対して $\mathbb{R}$ 上の関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(4 + n^2x^2)}$$

で定義する．

(1) 関数 $y = \arctan x$ の導関数を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{n}} f_n(x)\,dx$ の値を求めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx$ の値を求めよ．

(4) δ を正の実数とする．次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\delta}^{\delta} f_n(x)\,dx$$

$\boxed{2}$ $D = \{(x, y) \mid x + y \leq \pi,\ 0 \leq x,\ 0 \leq y\}$ とし，

$$f(s, t) = \iint_D \left[t\sin(x - y + s) + (x + y + t)^2\right] dxdy$$

と定める．

(1) 重積分を計算し $f(s, t)$ を求めよ．

(2) 領域 $E = \{(s, t) \mid 0 < s < 2\pi, t \in \mathbb{R}\}$ における関数 $f(s, t)$ の極大値，極小値をすべて求めよ．

$\boxed{3}$ a を実数とし，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A が $\mathbb{C}$ 上で対角化できるための a に関する条件を求めよ．

$\boxed{4}$ 　時刻 $t=0$ で生存していた n_0 個体の成員から成るある生物集団が成員の死亡（消失）によって徐々に小さくなっていく過程（死亡過程）について考える．ここでは，生物集団の各成員の死亡は独立な事象とし，時刻 t において生存している各成員が微小時間 $[t, t+\Delta t]$ において死亡する確率が $\mu\Delta t$ （μ は正定数）で与えられるとする．

(1) 時刻 t において成員数が n である確率を $P(n,t)$ と表す．$P(n_0, t+\Delta t)$ と $P(n_0,t)$ の関係式により, $P(n_0,t)$ が満たすべき常微分方程式を導き, $P(n_0,t)$ を求めよ．

(2) 時刻 t まで死亡が起こらず, 最初の成員死亡が時間 $[t, t+\Delta t]$ で起こる確率を n_0, μ, t, Δt を用いて表せ.

(3) 成員数が n_0-1 になるまでの時間 T_1 の期待値 $\langle T_1\rangle_{n_0}$ を求めよ．

(4) 成員数 n_0 の生物集団が絶滅するまでの時間 T_e の期待値 $\langle T_e\rangle_{n_0}$ と成員数 n_0-1 の生物集団が絶滅するまでの時間の期待値 $\langle T_e\rangle_{n_0-1}$ の間に次の関係式 (R) が成り立つことを説明し，$\langle T_e\rangle_{n_0}$ を求めよ．

(R) $$\langle T_e\rangle_{n_0} = \langle T_1\rangle_{n_0} + \langle T_e\rangle_{n_0-1}$$

$\boxed{5}$ 　n を正の整数とし，2 以上の整数 k に対し

$$P_{n,k} = \left\{ (X_1, X_2, \ldots, X_k) \;\middle|\; \begin{array}{l} X_1, X_2, \ldots, X_k \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}, \\ X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_k = \emptyset \end{array} \right\}$$

とする．なお，有限集合 S の要素の個数を $|S|$ で表す.

(1) ℓ を $0 \leq \ell \leq n$ を満たす整数とするとき，

$$\left| \left\{ (X_1, X_2) \,\middle|\, (X_1, X_2) \in P_{n,2},\ |X_1| = \ell \right\} \right|$$

を求めよ.

(2) $|P_{n,2}|$ を求めよ.

(3) 成分が $\{0,1\}$ からなる n 行 3 列の行列で，どの行にも 0 が少なくとも 1 つは含まれるもの全体のなす集合を $Q_{n,3}$ とする．すなわち，

$$Q_{n,3} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} \in \{0,1\} \quad (1 \leq i \leq n), \\ (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) \neq (1,1,1) \quad (1 \leq i \leq n) \end{array} \right\}$$

とする．$P_{n,3}$ から $Q_{n,3}$ への全単射を 1 つ与えよ．

(4) $|P_{n,3}|$ を求めよ．

$\boxed{6}$ 2 つの確率変数 X, Y は独立であり，ともに $[0,1]$ 上の一様分布に従うものとする．

(1) X の平均値 $\mathbf{E}[X]$ と分散 $\mathbf{V}[X]$ を求めよ．

(2) $|X-Y|$ の平均値 $\mathbf{E}[\,|X-Y|\,]$ を求めよ．

(3) a を実定数として, $Z = X + aY$ とおく．X と Z の相関係数 r を求めよ．ただし，r は次のように定義される．

$$r = \frac{\mathbf{Cov}(X,Z)}{\sqrt{\mathbf{V}[X]\mathbf{V}[Z]}}, \qquad \mathbf{Cov}(X,Z) = \mathbf{E}[(X-\mathbf{E}[X])(Z-\mathbf{E}[Z])]$$

$\boxed{7}$ 複素平面上の有理型関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{1}{1+z^5}$$

によって定義する．

(1) 領域 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0, 0 < \arg z < \frac{2\pi}{5}\}$ 内にある $f(z)$ の極とその点における留数をすべて求めよ．

(2) $R > 0$ に対して, C_R を $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{5})$ で定義される曲線とする．このとき，

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$$

であることを示せ．

(3) 次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^5}$$

$\boxed{8}$ 関数 $q(t)$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された連続な負値関数とし，関数 $y = y(t)$ を次の微分方程式 (L) の $\mathbb{R}$ 上の実数値解とする．

(L) $$y'' + q(t)y = 0$$

(1) $z = y^2$ とおくとき，$\mathbb{R}$ 上で $z'' \geq 0$ であることを示せ．

(2) y が $\mathbb{R}$ 上有界ならば，y は自明解であることを示せ．

(3) y が 2 つの零点をもつならば，y は自明解であることを示せ．

$\boxed{9}$ $\mathbb{R}$ を実数全体の集合に通常の位相を入れたものとする．$x, y \in \mathbb{R}$ に対して，$x - y$ が整数のとき $x \sim y$ と定める．

(1) $\sim$ は同値関係になることを示せ．

(2) 商空間 $\mathbb{R}/\sim$ は円周 $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ と同相になることを示せ．ただし S^1 には，$\mathbb{R}^2$ の相対位相を入れるものとする．

$\boxed{10}$ S_3 を 3 次対称群とし, S_3 の位数 3 の元全体の集合で生成される部分群を H とする．

(1) H の元をすべて書け．

(2) H が S_3 の正規部分群であることを証明せよ．

(3) S_3 が巡回群でないことを証明せよ．

(4) S_3 の部分群をすべて求めよ．