2015年8月

1 f を開区間 I 上の 2 回微分可能な関数とする．

(1) 任意の $x \in I$ に対して

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

を示せ．

(2) 任意の $x \in I$ に対して $f''(x) \geq 0$ であることと，任意の $a, b \in I$ に対して

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

が成立することが同値であることを示せ．

(3) 任意の $a, b \in (0, \pi)$ に対して

$$\left(\frac{\sin c}{c}\right)^2 \geq \frac{\sin a}{a} \cdot \frac{\sin b}{b}$$

を示せ．ただし，$c = \dfrac{a+b}{2}$ とする．

2 実数 α に対して次の広義積分を考える：

$$F(\alpha) = \iint_D \sin^\alpha(x^2+y^2)\,dxdy$$

ただし，$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2+y^2 < \pi\}$ とする．

(1) 広義積分 $F(\alpha)$ が収束するための α に関する必要十分条件を求めよ．

(2) 次の式が成り立つことを示せ．

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (a, b > 0)$$

ただし，$\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\,t^{s-1}\,dt$.

(3) (1) の条件の下で，積分値 $F(\alpha)$ を関数 $\Gamma(s)$ の値を用いて表せ．

3 k を定数とし，$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & k & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ とおく．${}^tX\,X = A$ を満たす 2×3 行列 X が存在すると仮定する．ただし，${}^tX$ は X の転置行列を表す．

(1) k の値と A の階数を求めよ．

(2) すべての要素が整数である X を一つ求めよ．

(3) 自然数 n に対して A^n を求めよ．

$\boxed{4}$ 定常的に消費されているある生物資源量の時間変動の数理モデルとして次の微分方程式を考える：

$$\frac{dN(t)}{dt} = \{1 - N(t)\}\, N(t) - hN(t)$$

ここで，$N(t)$ は時刻 t における生物資源量を表し，消費率 h は正定数である．$N(0) = N_0 > 0$ とする．

(1) $N(t)$ を求めよ．

(2) 生物資源が枯渇しないための消費率 h に関する条件を求めよ．

(3) 定常状態における単位時間あたりの消費資源量を最大にする h の値を求めよ．

$\boxed{5}$ v, k, t は $v \geq k \geq t$ を満たす正の整数とし，Ω を v 点集合とする．$\mathcal{B}$ を Ω の k 点部分集合の族とし，Ω の任意の t 点部分集合 T に対して，$T \subset B$ を満たす $B \in \mathcal{B}$ がただ一つ存在すると仮定する．有限集合 X の要素の個数を $|X|$ で表す．

(1) $|\mathcal{B}|$ を v, k, t を用いて表せ．

(2) i を t 以下の正の整数とする．Ω の i 点部分集合 S に対して，$|\{B \in \mathcal{B} \mid S \subset B\}|$ を v, k, t, i を用いて表せ．

(3) $v = 7,\ k = 3,\ t = 2$ の場合に，Ω と $\mathcal{B}$ の組の例を一つ与えよ．

$\boxed{6}$ コイン投げをする．表が出たら1，裏が出たら0を対応づける．n 回目の結果を X_n として，$\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ と仮定する．p は n によらない定数であり，$0 < p < 1$ を満たす．さらに，確率変数 T を

$$T = \inf\{\, n \mid X_{n-1} \neq X_n,\ n \geq 2\,\}$$

と定義する．ただし，$\{\, n \mid X_{n-1} \neq X_n,\ n \geq 2\,\} = \emptyset$ のときは $T = \infty$ とする．

(1) $n \geq 2$ に対して $A_n = \{X_{n-1} \neq X_n\}$ とするとき，$\mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1})$ を求めよ．

(2) $\mathbb{P}(T = n)$ を計算して，$\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ を示せ．

(3) $\mathbb{P}(X_T = 1,\ X_{T+1} = 0)$ を求めよ．

$\boxed{7}$ 複素平面 $\mathbb{C}$ から負の虚軸 $\{iy \mid y \leq 0\}$ を除いたスリット領域を Ω とする．$\log z$ を，z の自然対数の Ω 上一価正則な分枝のうち，$\log 1 = 0$ を満たすものとする．$-1 < a < 1$ を満たす定数 a に対して Ω 上の有理型関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{e^{a \log z}}{1 + z^2}$$

により定義する．

(1) 上半平面 $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ の $\log z$ による像領域を求めよ．

(2) 上半平面 H における $f(z)$ の留数をすべて求めよ．

(3) 正数 R に対して曲線 $\gamma_R(t) = Re^{it}$ $(0 \leq t \leq \pi)$ 上の複素積分

$$I_R = \int_{\gamma_R} f(z) dz$$

を考える．

$$\lim_{R \to 0+} I_R = \lim_{R \to +\infty} I_R = 0$$

であることを示せ．

(4) 次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{1 + x^2} dx$$

$\boxed{8}$ 区間 $I = [0, 1]$ 上の実数値 C^2 級関数 $u = u(x)$ が

$$u''(x) - (4x^2 + 2)u(x) = e^{-x^2}, \quad u(0) = u(1) = 0$$

を満たすとする．I 上の実数値関数の空間 V を

$$V = \{v \mid v \text{ は } I \text{ 上 } C^1 \text{ 級で，} v(0) = v(1) = 0 \text{ を満たす}\}$$

で定める．さらに，V 上の汎関数 $J : V \to \mathbb{R}$ を

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 (v'(x))^2 \, dx + \int_0^1 (2x^2 + 1) v(x)^2 \, dx + \int_0^1 e^{-x^2} v(x) \, dx$$

で定める．

(1) $w(x) = u(x) e^{-x^2}$ とおいて，$w = w(x)$ の満たす微分方程式を求めよ．

(2) $u(x)$ を求めよ．

(3) 不等式 $J(u) \leq J(v)$ $(v \in V)$ を示せ．さらに，この不等式で等号が成立するための必要十分条件を求めよ．

$\boxed{9}$ $\mathbb{R}^2$ を 2 次元ユークリッド空間とする．$X \subset \mathbb{R}^2$ に対し，集合 $\widehat{X}$ を $X \cup \{\infty\}$ とする．ただし，∞ は $\mathbb{R}^2$ に含まれない点である．また，$\widehat{X}$ の集合系 $\mathcal{O}$ を次のように定める．

- X の開集合 U は $\mathcal{O}$ に含まれる．ただし，X には $\mathbb{R}^2$ から定まる相対位相を入れる．
- X のコンパクト集合 K に対し $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$ は $\mathcal{O}$ に含まれる．ただし，空集合はコンパクト集合とみなす.

(1) $(\widehat{X}, \mathcal{O})$ は $\mathcal{O}$ を開集合系とする位相空間となることを示せ.

(2) $(\widehat{X}, \mathcal{O})$ はコンパクトであることを示せ.

(3) $X = \mathbb{R}^2$ のとき $(\widehat{X}, \mathcal{O})$ はどのような空間になるか述べよ.

(4) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ のとき $(\widehat{X}, \mathcal{O})$ はどのような空間になるか述べよ.

$\boxed{10}$ F を体とし，F 上の多項式環 $F[x]$ を考える．θ_1, θ_2 を F の相異なる元とする．$F[x]$ の元 $f(x)$ の生成する $F[x]$ の単項イデアルを $(f(x))$ で表す.

(1) 剰余環 $F[x]/(x - \theta_1)$, $F[x]/(x - \theta_2)$ が F と環同型であることを示せ.

(2) 剰余環 $F[x]/((x - \theta_1)(x - \theta_2))$ が直和 $F[x]/(x - \theta_1) \oplus F[x]/(x - \theta_2)$ と環同型であることを示せ.

(3) $F[x]/((x - \theta_1)(x - \theta_2))$ の極大イデアルをすべて求めよ.

(4) $F[x]/((x - \theta_1)(x - \theta_2))$ から F への 0 でない環準同型をすべて求めよ.