2016年8月

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}^2$ 上の関数 f を

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{-y/x} & x \neq 0, \\ 1 & \text{その他} \end{cases}$$

で定める．

(1) $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続であるかどうか調べよ．

(2) $f(x,y)$ は $(0,1)$ で連続であるかどうか調べよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ を求めよ．ただし，

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \geq 1,\ y \geq \sqrt{3}\,x,\ x \geq 0\}$$

である．

$\boxed{2}$ $E = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s > 0,\ t > 0\}$ とする．また，$f(x,y) = \sin(\sin x \sin y)$ とし，E 上の実数値関数 φ を

$$\varphi(s,t) = \int_0^s dx \int_0^t f(x,y)\,dy \qquad ((s,t) \in E)$$

と定める．

(1) $\varphi_s(s,t) = 0$ となる点 $(s,t) \in E$ をすべて求めよ．さらに，$\varphi(s,t)$ が s に関して一定になるような正の実数 t をすべて求めよ．ここで，φ_s は φ の s に関する偏微分を表す．

(2) 重積分

$$\int_0^s dx \int_0^t f_x(x,y)\,dy$$

の積分順序を変更することにより，次を示せ．

$$\varphi_{ss}(s,t) = \int_0^t f_x(s,y)\,dy \qquad ((s,t) \in E)$$

(3) φ が極大となる点および極小となる点をすべて求めよ．ただし，φ の値は求めなくて良い．

$\boxed{3}$ a を正の実数とし，

$$A = \begin{pmatrix} a+2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 1+a \\ 0 & 1+a & 1-a \end{pmatrix}$$

とおく．ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル x, y に対して，標準的な内積を (x,y) で表す．

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $(x, Ax) = 0$ となる，零ベクトルではない $\mathbb{R}^3$ のベクトル x が存在することを示せ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の任意の 2 次元部分空間 W に対して，$(x, Ax) \geq 2$ となる長さ 1 のベクトル x が W の中に存在することを示せ．

$\boxed{4}$ ある人口集団における噂（情報）の伝播についての次の数理モデルを考える：

$$x_{k+1} = e^{-\gamma y_k} x_k$$
$$y_{k+1} = \left(1 - e^{-\gamma y_k}\right) x_k + (1-q) y_k$$

x_k は噂が発生後の k 日目において噂を知らない者の数，y_k は噂を知っていてそれを伝える気のある者（伝達者）の数を表し，上の数理モデルは，それぞれの数の日変動を与えている．$x_0 > 0$，$y_0 > 0$ とおく．γ および q は定数であり，$\gamma > 0$，$0 \leq q \leq 1$ とする．また，考えている集団の人口は定数であるとする．

(1) $1 - e^{-\gamma y_k}$ は，k 日目において，噂を知らない者が噂の伝達者から噂を伝達され，噂の伝達者へ変わる確率を意味し，正定数 γ は，噂の伝達者の生まれやすさを表す係数である．定数 q の考えうる意味について述べよ．

(2) 上の数理モデルに対して，関数

$$V(x, y) = x + y - \frac{q}{\gamma} \log x$$

を考える．$V(x_k, y_k)$ が k に依らない定数であることを示せ．

(3) $x_0 \leq q/\gamma$ ならば，噂の流行，すなわち，噂の伝達者の数が増加する現象が起こらないことを示せ．

(4) $q \neq 0$ のとき，噂の流行が起こるための条件を求めよ．

$\boxed{5}$ n を自然数とし，集合 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ のべき集合を 2^N で表す．

(1) 全単射 $f : 2^N \to 2^N$ は，包含関係を保つ，すなわち，任意の $A, B \in 2^N$ に対して，$A \subseteq B$ ならば $f(A) \subseteq f(B)$ をみたすとする．このとき，N の置換 σ が存在して，任意の $A \in 2^N$ に対して $f(A) = \sigma(A)$ となることを示せ．ここで，$\sigma(A) = \{\sigma(a) \mid a \in A\}$ である．

(2) 全単射 $g : 2^N \to 2^N$ は，包含関係を逆転する，すなわち，任意の $A, B \in 2^N$ に対して，$A \subseteq B$ ならば $g(A) \supseteq g(B)$ をみたすとする．このとき，任意の $A, B \in 2^N$ に対して，$g(A \cap B) = g(A) \cup g(B)$ がなりたつことを示せ．

(3) 包含関係を逆転する全単射 $2^N \to 2^N$ の総数を n で表せ．

6

関数 g を $0 \leq g \leq 1$ を満たす，$\mathbb{R}$ 上の単調な連続関数とし，

$$m = \int_0^1 g(x)\,dx$$

とおく．今，X を $[0,1]$ 上の一様分布に従う確率変数とし，

$$Y = g(X), \quad Z = \frac{g(X) + g(1-X)}{2}$$

を考える．

(1) 期待値 $\mathbf{E}(Y)$, $\mathbf{E}(Z)$ と分散 $\mathrm{V}(Y)$, $\mathrm{V}(Z)$ を m, g を用いて表せ．

(2) 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ について，

$$(g(x) - g(y))(g(1-x) - g(1-y)) \leq 0$$

が成立することを示せ．

(3) 次の不等式を示せ．

$$\int_0^1 g(x)g(1-x)\,dx \leq m^2$$

(4) $\{X_1, X_2, \dots\}$ を $[0,1]$ 上の一様分布に従う独立同分布確率変数列とする．次の二つの統計量

$$A_n = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} g(X_i), \quad B_n = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(g(X_i) + g(1-X_i))$$

のうち，m を計算するために，より有効な推定量はどちらか．

7

$a > 1$ を定数とし，複素平面上の有理型関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{z}{a - e^{-iz}}$$

により定義する．ただし，i は虚数単位，e は自然対数の底とする．

(1) $f(z)$ のすべての極とその点における留数を求めよ．

(2) 次の広義積分の値を求めよ．

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{a + e^y}$$

(3) $\pm\pi, \pm\pi + it$ を 4 頂点とする長方形の周に沿う $f(z)$ の積分を考えることにより，次の式を示せ．

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 - 2a\cos x + a^2}\,dx = \frac{\pi}{a}\log\frac{a+1}{a}$$

$\boxed{8}$ 2つの実数値関数 $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ が次を満たすとする．

$$\begin{cases} x' = (\cos t)x - (\sin t)y \\ y' = (\sin t)x + (\cos t)y \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

関数 $f = f(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ を次で定める．

$$f(t) = \{x(t)\}^2 + \{y(t)\}^2$$

(1) $f(t)$ を求めよ．

(2) $x = \sqrt{f(t)}\cos\theta$, $y = \sqrt{f(t)}\sin\theta$ および $\theta(0) = 0$ を満たす実数値関数 $\theta = \theta(t)$ を導入して，$x(t)$, $y(t)$ を求めよ．

(3) 曲線：$x = x(t),\ y = y(t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ を xy 平面上に図示せよ．

$\boxed{9}$ 実3次正方行列の集合 $M(3;\mathbb{R}) = \{X = (x_{ij}) \mid x_{ij} \in \mathbb{R}\ (i, j = 1, 2, 3)\}$ を自然に実9次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^9$ と同一視して，位相空間とみなす．また，$M(3;\mathbb{R})$ の部分集合

$$\begin{aligned} GL_+(3;\mathbb{R}) &= \{X \in M(3;\mathbb{R}) \mid \det X > 0\}, \\ SL(3;\mathbb{R}) &= \{X \in M(3;\mathbb{R}) \mid \det X = 1\}, \\ O(3) &= \{X \in M(3;\mathbb{R}) \mid {}^tXX = E_3\} \end{aligned}$$

を相対位相で位相空間とみなす．ただし，$\det X$ は X の行列式，${}^tX$ は X の転置行列，E_3 は単位行列とする．

(1) $GL_+(3;\mathbb{R})$, $SL(3;\mathbb{R})$ は $M(3;\mathbb{R})$ の開集合か閉集合かを，理由を述べて答えよ．

(2) $O(3)$ はコンパクトであることを示せ．

(3) $O(3)$ は連結でないことを示せ．

(4) $SO(3) = O(3) \cap SL(3;\mathbb{R})$ は弧状連結であることを示せ．

$\boxed{10}$ G を有限群とし，p を G の位数を割り切る素数とする．k を G の中心の元とする．$G^p = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \mid x_i \in G\}$ とし，

$$S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in G^p \mid x_1 x_2 \cdots x_p = k\}$$

とする．τ を次で定義される G^p から G^p への写像とする．

$$\tau(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (x_2, \ldots, x_p, x_1)$$

有限集合 X の要素の個数を $|X|$ で表す．

(1) $|S|$ を求めよ.

(2) $\tau(S) = S$ を示せ.

(3) $\bigl|\{a \in S \mid \tau(a) = a\}\bigr| \equiv 0 \pmod p$ を示せ.

(4) G が位数 p の元を持つことを示せ.