2017年8月

$\boxed{1}$

(1) $0 < x < 1$ のとき，不等式 $\log(1-x) < -x$ を示せ．

(2) 各自然数 n に対して

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

とおく．数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は狭義単調減少列であることを示せ．

(3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することを示せ．

$\boxed{2}$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + |y| \leq x\}$ 上の関数

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2(x+y+1)}$$

を考える．

(1) 変数変換 $u = x + y, v = x - y$ に対するヤコビ行列式を求めよ．

(2) 自然数 n に対して $D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + |y| \leq x \leq n\}$ とおく．次の重積分を求めよ．

$$\iint_{D_n} f(x,y)dxdy$$

(3) 広義積分

$$\iint_{D} f(x,y)dxdy$$

が収束することを示し，その値を求めよ．

$\boxed{3}$

a, b, c, d を実数の定数とし，x, y, z, w を未知数とする次の連立 1 次方程式を考える．

$$\begin{cases} x + 2y - z + w = a \\ 2x + 4y - 2z + 2w = b \\ -2x - 4y + 3z = c \\ 3x + 6y - z + 7w = d \end{cases}$$

(1) 方程式の係数行列 A の階数を求めよ．

(2) 方程式が少なくとも 1 つの解をもつための a, b, c, d に関する条件を求めよ．

(3) A の固有値を求めよ．

(4) A の固有値のうち整数であるものを λ とするとき，λ に関する固有空間の基底を求めよ．

$\boxed{4}$ 捕食者個体群とその被食者個体群のサイズ（個体群密度）変動に関する数理モデル

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, y)$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = g(x, y)$$

について考える．ここで $x(t), y(t)$ は，時刻 t における被食者個体群サイズ，捕食者個体群サイズを表す．関数 $f(x, y), g(x, y)$ は，いずれも x, y について連続かつ微分可能であるとする．

(1) 関数 $f(x, y)$, $g(x, y)$ は，条件 $f_y(x, y) \leq 0$, $g_x(x, y) \geq 0$ を満たす必要がある．その理由を説明せよ．

(2) 関数 $f(x, y)$ が $f(0, y) > 0$ を満たすとき，この数理モデルにおいて設定されていると考えられる生物学的仮定について述べよ．

(3) 次の条件を満たす定数 $x_c > 0$ が存在するとする．

$$\begin{cases} g(x, y) < 0 & (0 \leq x < x_c,\ y > 0) \\ g(x, y) > 0 & (x > x_c,\ y > 0) \end{cases}$$

このとき，この数理モデルにおいて設定されていると考えられる生物学的仮定について述べよ．

(4) 次の条件を満たす定数 $y_c > 0$ が存在するとする．

$$g(x, y) < 0 \qquad (x > 0,\ 0 \leq y < y_c)$$

このとき，この数理モデルにおいて設定されていると考えられる生物学的仮定について述べよ．

$\boxed{5}$ n, k は $n \geq 2k$ を満たす正の整数とする．X, Y を $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$ の部分集合で $|X| = |Y| = k$ を満たすものとし，$i = |X \cap Y|$ とする．なお，有限集合 A の要素の個数を $|A|$ で表す．

(1) $0 \leq j \leq k$ に対して

$$\left| \left\{ Z \,\middle|\, Z \subset \mathcal{N},\ |Z| = k,\ |X \cap Z| = j \right\} \right|$$

を n, k, j で表せ．

(2) $0 \leq i < k$ のとき

$$\left|\left\{Z \;\middle|\; Z \subset \mathcal{N},\ |Z| = k,\ |X \cap Z| = i+1,\ |Y \cap Z| = k-1\right\}\right|$$

を n, k, i で表せ.

(3) $0 \leq i < k$ のとき

$$\left|\left\{Z \;\middle|\; Z \subset \mathcal{N},\ |Z| = k,\ |X \cap Z| = i,\ |Y \cap Z| = k-1\right\}\right|$$

を n, k, i で表せ.

$\boxed{6}$ n を自然数とし，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を $[0,1]$ 上の一様分布に従う独立同分布な確率変数列とする．$M_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, L_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ とおく．

(1) 実数 x に対して，$F(x) = P(M_2 \leq x)$ を求めよ．

(2) M_2 の確率密度関数を求め，M_2 の平均値を計算せよ．

(3) L_n の確率密度関数を求めて，その平均値を計算せよ．

$\boxed{7}$

(1) 複素平面上の有理関数

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+4)(z^2+5)}$$

の極および留数をすべて求めよ．

(2) γ_R を反時計回りに向きづけられた円周 $|z| = R$ の上半分，すなわち $\mathrm{Im}\, z \geq 0$ を満たす部分とする．このとき，

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$$

であることを示せ．

(3) 留数定理を用いて広義積分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+5)} dx$$

の値を求めよ．

$\boxed{8}$ 関数 $y = y(x)$ に関する微分方程式

$$xy'' + 5y' - xy = 0$$

を考える．解 $y_1 = y_1(x)$ はべき級数

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

で与えられ，$y_1(0) = 1$ を満たすとする．もう一つの解 $y_2 = y_2(x)$ は初期条件

$$y_2(1) = 0, \quad y_2'(1) = y_1(1)$$

を満たすとする．

(1) y_1 を決定し，その収束半径を求めよ．

(2) 関数 $u = u(x)$ を導入し，$y_2 = uy_1$ とする．u の満たす微分方程式

$$a_2 u'' + a_1 u' + a_0 = 0$$

の係数 a_0, a_1, a_2 を x, y_1, y_1' を用いて表せ．

(3) y_2 を求めよ．

$\boxed{9}$ $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ 上の微分形式

$$\omega = \frac{-ydx}{x^2 + y^2} + \frac{xdy}{x^2 + y^2}$$

を考える．

(1) $d\omega = 0$ を示せ．

(2) (r, θ) を極座標としたとき，ω を dr と $d\theta$ を用いて表せ．

(3) D 上で $\omega = df$ を満たす滑らかな関数 f が存在しないことを示せ．

$\boxed{10}$ 写像 $f : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^2$ を

$$f(a, b, c) = (3a + 3c, 3b - 3c) \quad ((a, b, c) \in \mathbb{Z}^3)$$

と定義する．

(1) f は加法群の準同型であることを示せ．

(2) f の核の生成元を求めよ．

(3) f の像を $\mathrm{Im}\, f$ で表すとき，剰余群 $\mathbb{Z}^2/\mathrm{Im}\, f$ は有限群となることを示せ．

(4) $\mathbb{Z}^2/\mathrm{Im}\, f$ は巡回群ではないことを示せ．