# 2018年8月

**1** $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f$ を

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

で定める．$f$ の偏導関数について以下の問に答えよ．

(1) $(x,y)\neq(0,0)$ のとき，$f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ を求めよ．

(2) $f_x(0,0)$ と $f_y(0,0)$ を求めよ．

(3) $f_{xy}(0,0)$ と $f_{yx}(0,0)$ を求めよ．

(4) $f_{xy}(x,y)$ は $(0,0)$ で連続であるかどうかを調べよ．

**2** 正の実数 $s$ に対して，$f_s(x)=x^{-s}(\arctan x-1)$ とおく．

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} f_3(x)\,dx$ を求めよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} f_2(x)\,dx$ を求めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} f_s(x)\,dx$ が収束するための $s$ に関する条件を求めよ．

**3** $x,y$ は実数とし，行列 $A$ を次のように定める．

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&x\\0&-x&y\end{pmatrix}$$

(1) $A$ の固有値がすべて実数であるような $x,y$ の範囲を図示せよ．

(2) $A$ が重複度 2 以上の固有値を持つような $x,y$ の範囲を図示せよ．

(3) $A$ が重複度 2 以上の固有値を持ち，かつ対角化可能であるような $x,y$ の範囲を図示せよ．

$\boxed{4}$ 年次変動する環境条件下にある春期結実性の一年生植物の種子における休眠の適応性について以下の条件のもとで考える．

- 春期の環境条件が繁殖にとって好適である確率を $p$，不適である確率を $1-p$ とする．
- 考えている一年生植物は結実すれば，好適な環境条件下では，個体当たり $M$ 個の種子を作り，不適な環境条件下では，個体当たり $m$ 個（$0 \leq m < M$）の種子を作るものとする．
- 春期における種子の発芽確率を $g$（$0 \leq g \leq 1$）とする．
- 発芽しなかった種子は，埋土種子として 1 年間を土中で休眠し，翌年の春まで生き残り，再び確率 $g$ で発芽するものとする．
- 発芽した種子は，成長して，必ず成熟個体となり，種子を生産できるものとする．
- 休眠状態の埋土種子は，変動環境の影響は受けずに生存できるとする．

去年の秋における埋土種子総数が $S_0$ であったとき，今年と来年の一年生植物個体群の繁殖について考える．

(1) 今年の秋における埋土種子総数の期待値 $S_1$ を導け．

(2) 今年が好適な環境条件で，来年が不適な環境条件であった場合の，来年の秋における埋土種子総数の期待値 $S_2$ を求め，$S_2$ を最大にする $g$ の値を求めよ．

(3) $S_2$ を最大にする $g$ が正であるような植物個体群がもつ性質について述べよ．

$\boxed{5}$ 成分が $1, -1$ のみからなる $n$ 次元のベクトル全体の集合を $\{\pm 1\}^n$ で表し，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \{\pm 1\}^n$ に対して，これらを $\mathbb{R}^n$ のベクトルと考えたときの通常の内積を $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ と書くことにする．

(1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = 0$ を満たす $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \{\pm 1\}^n$ が存在するならば，$n$ は 4 で割り切れることを示せ．

(2) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = -1$ を満たす $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \{\pm 1\}^n$ が存在するならば，$n+1$ は 4 で割り切れることを示せ．

(3) $n = 97, 98, 99, 100$ のとき，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = -k$ を満たす $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \{\pm 1\}^n$ が存在するような正の整数 $k$ の最大値をそれぞれ求めよ．

$\boxed{6}$ $n$ を自然数とし，$x \in [0, 1]$ とする．確率変数 $Z$ は二項分布 $B(n, x)$ に従うものとする．すなわち，$k = 0, 1, 2, \ldots, n$ に対して，$P(Z = k)$ が次のように与えられる．

$$P(Z = k) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

(1) $n=1$ のとき，期待値 $E(Z)$，分散 $V(Z)$ を計算せよ．

(2) 一般の自然数 $n$ について，期待値 $E(Z)$，分散 $V(Z)$ を計算せよ．

(3) $f$ を $[0,1]$ 上の実数値連続関数とする．任意の $x \in [0,1]$ に対して

$$\left| f(x) - E\left( f\left( \frac{Z}{n} \right) \right) \right| \leq E\left( \left| f(x) - f\left( \frac{Z}{n} \right) \right| \right)$$

を示せ．

(4) $[0,1]$ 上の実数値連続関数 $f$ に対して，

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

とする．

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - B_n(f,x)| \to 0, \quad n \to \infty$$

であることを示せ．

$\boxed{7}$ 複素平面 $\mathbb{C}$ 内の線分 $L = \{z \in \mathbb{R} \mid -1 \leq z \leq 1\}$ に対して，領域 $\Omega = \mathbb{C} \setminus L$ 上の複素数値関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \int_L \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta$$

で定める．ここで，この複素積分は始点を $-1$，終点を $1$ とする線分 $L$ に沿うものである．

(1) $f(z)$ は $\Omega$ 上正則であることを示せ．

(2) 点 $z=-2$ のまわりの $f(z)$ の テイラー級数展開を求めよ．

(3) 複素積分

$$\int_{|z|=7} e^z f(z)\, dz$$

の値を求めよ．ここで，円周 $|z|=7$ は反時計回りに向きづけられているものとする．

$\boxed{8}$ $\mathbb{R}$ 上の次の 3 つの関数 $y_j = y_j(x)$ $(j=1,2,3)$ を考える．

$$y_1(x) = e^{2x}\cos \pi x, \quad y_2(x) = e^{2x}\sin \pi x, \quad y_3(x) = e^x$$

(1) 関数 $y_1, y_2, y_3$ が線形独立であることを示せ．

(2) 3 つの関数 $y_1, y_2, y_3$ がすべて微分方程式 $y''' + ay'' + by' + cy = 0$ の解となるように実定数 $a, b, c$ を定めよ．

(3) (2) で定めた微分方程式の解 $y$ で，条件

$$y(0)=0, \quad y'(0)=2, \quad y(1)=e$$

を満たすものを求めよ．

$\boxed{9}$ $(X,d)$ を距離空間とし，空でない部分集合 $A, B \subset X$ に対し，

$$\delta(A,B)=\inf\left\{d(x,y) \,\middle|\, x\in A,\, y\in B\right\}$$

と定める．

(1) $A\cap B=\emptyset$ かつ $\delta(A,B)=0$ となる距離空間 $(X,d)$ と空でない閉部分集合 $A, B$ の具体例を挙げよ．

(2) 空でないコンパクト部分集合 $A, B$ に対し，$\delta(A,B)=0$ ならば $A\cap B\neq\emptyset$ であることを示せ．

$\boxed{10}$ $S_4$ を 4 次対称群とする．$\sigma=(1\ 2)(3\ 4), \sigma'=(1\ 3)(2\ 4)\in S_4$ として，

$$N=\{\tau\in S_4 \mid \sigma\tau=\tau\sigma,\ \sigma'\tau=\tau\sigma'\}$$

とおく．

(1) $N$ は $S_4$ の正規部分群であることを示せ．

(2) 剰余群 $S_4/N$ は 3 次対称群 $S_3$ と同型であることを示せ．

(3) $\sigma, \sigma'$ を 5 次対称群 $S_5$ の元とみなして

$$H=\{\tau\in S_5 \mid \sigma\tau=\tau\sigma,\ \sigma'\tau=\tau\sigma'\}$$

とおくとき，$H$ は $S_5$ の正規部分群ではないことを示せ．