2019年8月

$\boxed{1}$ n を非負整数とする．

(1) 関数

$$f(x) = x^n e^{-x}$$

の $x \geq 0$ における最大値を求めよ．

(2) 広義積分

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

を計算せよ．

(3) すべての $a > 0$，$b > 0$ に対して

$$a^n \int_a^\infty e^{-bx} dx \leq C \int_0^\infty x^n e^{-bx} dx$$

を満たす定数 $C > 0$ のうち最小のものを C_n とする．C_n を求めよ．

$\boxed{2}$ $D = (0,1) \times (0,\pi)$ を平面上の領域とする．D 上の関数 $R(x,t)$, $\Theta(x,t)$ を

$$R(x,t) = \frac{x \sin t}{\sqrt{1 - x^2 \cos^2 t}},$$
$$\Theta(x,t) = \arccos(x \cos t)$$

により定義する．

(1) $\dfrac{\partial R}{\partial x}(x,t)$，$\dfrac{\partial R}{\partial t}(x,t)$，$\dfrac{\partial \Theta}{\partial x}(x,t)$，$\dfrac{\partial \Theta}{\partial t}(x,t)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 写像 $F(x,t) = (R(x,t), \Theta(x,t))$ のヤコビアンは

$$\frac{\partial(R(x,t), \Theta(x,t))}{\partial(x,t)} = \frac{x}{\sin^2(\Theta(x,t))}$$

となることを示せ．

(3) $F(x,t) = (R(x,t), \Theta(x,t))$ は D から D への全単射写像になることを示せ．

(4) 整数 $k \geq 2$ に対して

$$\iint_{\bar{D}} \frac{r^k \sin^{k+2}\theta}{r^2 \sin^2\theta + \cos^2\theta} \, dr d\theta = \frac{1}{k} \int_0^\pi \sin^k t \, dt$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\bar{D}$ で D の閉包を表すとする．

$\boxed{3}$ p, q を実数とし，$A = \begin{pmatrix} 1 & p & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & p & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ q & q & q & q \end{pmatrix}$ とする．

(1) A と B のそれぞれの行列式を求めよ．

(2) A が正則となるための p に関する条件を求めよ．

(3) (2) の条件下で A の逆行列を求めよ．

(4) $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^4$ への線形写像 f を $f(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ で定める．f の像の次元および基底を求めよ．

$\boxed{4}$ 感染症の伝染ダイナミクスに関する以下の数理モデルについて考える．時刻 t における感染症感受性保持者（非感染者）数密度を $S(t)$，感染症感染者数密度を $I(t)$ で表す．また，$N(t) = S(t) + I(t)$ は考えている個体群の総密度を表す．

パラメータ λ, μ, β, γ はいずれも正の定数とする．ある時刻 t_0 が存在して，$t < t_0$ なる任意の t に対して，$S(t) = \lambda/\mu$, $I(t) = 0$ であり，$t = t_0$ において，$S(t_0) = \lambda/\mu - I_0$, $I(t_0) = I_0$ とする。I_0 は十分に小さな正値（$\ll \lambda/\mu$）である．そして，$t \geq t_0$ における感染症伝染ダイナミクスは次の常微分方程式系に従うものとする：

$$\frac{dS(t)}{dt} = \lambda - \mu S(t) - \beta S(t)I(t) + \gamma I(t)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \mu I(t) - \gamma I(t)$$

この数理モデルによる $t \geq t_0$ における感染症伝染ダイナミクスに関する次の問いに答えよ．

(1) パラメータ λ，μ，γ の意味を述べよ．特に，γ が大きな値をとることが感染症のどのような性質を表すかについて説明を加えること．

(2) この感染症伝染ダイナミクスにおける時刻 t_0 の意味を述べよ．

(3) 個体群総密度 $N(t)$ が時間に依らない定数であることを説明せよ．

(4) この数理モデルにおいては，$\beta > (\mu + \gamma)\mu/\lambda$ ならば，$t \to \infty$ のとき $I(t)$ が正の有限値 I^* に収束して，感染症は個体群に定着（風土病化）するが，$\beta \leq (\mu + \gamma)\mu/\lambda$ ならば，感染者数密度が時間とともに単調に減少して，感染症が流行することはない．このことを説明せよ．また，I^* をパラメータを用いて表せ．

$\boxed{5}$ 正の整数 k と実数 x に対して

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

と定義する．

(1) k を固定したとき $\binom{x}{k}$ は，正の整数 x の関数として単調非減少であることを示せ．

(2) x_1, x_2 を正の整数とし，$x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ とおくとき，$k \leq x + 1$ をみたす任意の正整数 k に対して

$$\binom{x_1}{k} + \binom{x_2}{k} \geq 2\binom{x}{k}$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{6}$ 一様分布が与えられた単位円板 $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ からランダムに 1 点を選び，その座標を (X, Y) とする．

(1) 確率変数 X の確率密度関数 $f_X(x)$ を求めよ．

(2) 確率変数 X の平均値 $\mathbf{E}[X]$ と分散 $\mathbf{V}[X]$ を求めよ．

(3) 2 つの確率変数 X, Y の共分散を求めよ．ただし，共分散は

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])]$$

で定義される．

(4) 2 つの確率変数 X, Y は独立であるか．理由を付して答えよ．

$\boxed{7}$ 複素平面上の有理型関数

$$f(z) = \frac{1 + z}{1 - z}$$

を考える．正数 $r > 0$ に対して，開円板 D_r を

$$D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$$

と定める．

(1) $0 < r \leq 1$ について，D_r の f による像 $f(D_r)$ を決定せよ．

(2) 関数 $f(z)$ の原点を中心とするローラン級数展開を領域 $0 < |z| < 1$ および $1 < |z|$ においてそれぞれ求めよ．

(3) 1 を除く正数 r について，円周 ∂D_r に反時計回りに向き付けた閉曲線を C_r とする．2 以上の整数 n に対して複素積分

$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z^n} dz$$

の値を求めよ．

$\boxed{8}$ k を実数の定数とする．関数 $y=y(x)$ に関する微分方程式について，以下の問いに答えよ．

(1) 微分方程式

$$y''-(k+1)y'+ky=0$$

の一般解を求めよ．

(2) 微分方程式

$$y''-(k+1)y'+ky=2xe^{x}$$

の特殊解を求めよ．

(3) $r(x)$ を，$r(0)=0$ をみたす滑らかな関数とする． 2 つの微分方程式

$$y''-2y'+y=2xe^{x}$$

と

$$y''-3y'+2y=r(x)$$

が共通の解を持つとき，関数 $r(x)$ を求めよ．

$\boxed{9}$ $\mathbb{R}^3$ 内の楕円面

$$\mathcal{E}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1\right\}$$

を考える．

(1) 関数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ を $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}-1$ と定義したとき，楕円面 $\mathcal{E}$ の各点で f の勾配 ∇f が 0 ベクトルでないことを示せ．

(2) 楕円面 $\mathcal{E}$ 上の各点で $\mathcal{E}$ の接平面と ∇f が直交することを示せ．

(3) 楕円面 $\mathcal{E}$ 上の各点の接平面は，その点での微分 df の核 $(df)^{-1}(0)$ と同一視されることを示せ．

$\boxed{10}$ $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d\in\mathbb{Z},\ |ad-bc|=1\right\}$, $S=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ とする．

(1) $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ が行列の積に関して群となることを証明せよ．

(2) 任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して，$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & n\end{pmatrix}$ が S, T, D で生成される部分群 $\langle S,T,D\rangle$ に含まれることを証明せよ．

(3) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \ a, b, d \in \mathbb{Z},\ |ad| = 1 \right\} \subset \langle S, T, D \rangle$ を証明せよ.

(4) $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}) = \langle S, T, D \rangle$ を証明せよ.