2020年8月

1 Answer the following questions.

(1) For a C^2 function $g(x)$ defined on the real line, show that

$$\frac{d^2g}{dx^2}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2}{h^2}\Big(\frac{g(x+h)+g(x-h)}{2} - g(x)\Big).$$

(2) For a C^2 function $f(x,y)$ defined on the Euclidean plane, show that

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\\ = &\lim_{h\to 0} \frac{4}{h^2}\Big(\frac{f(x+h,y)+f(x-h,y)+f(x,y+h)+f(x,y-h)}{4} - f(x,y)\Big).\end{aligned}$$

2 Consider the following matrices A and B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) For each of A and B, determine its eigenvalues and eigenspaces.

(2) Find all the vectors in $\mathbb{R}^3$ which are eigenvectors of both A and B.

(3) Show that the vectors found in (2) above are eigenvectors of every 3×3 matrix M such that $AM = MA$ and $BM = MB$.

(4) Show that every 3×3 matrix M such that $AM = MA$ and $BM = MB$ is diagonalizable.

3 $f(x)$ を $x \geq 1$ 上の非負値関数で広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ が収束するとする.

(1) $f(x) = \dfrac{x}{x^4+1}$ のとき，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ の値を求めよ.

(2) $f(x)$ が単調非増加であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$ となることを示せ.

(3) $f(x)$ が連続のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ となるか？ 正しければ証明し，誤りであれば反例を挙げて答えよ.

$\boxed{4}$ $\mathcal{S}$ を 3×3 置換行列全体の集合とする．ここで置換行列とは，各行各列の成分に 1 がちょうど 1 つだけあり，他が 0 の正方行列である．また $\mathbb{C}^3$ の部分空間 W が $\mathcal{S}$-不変であるとは，任意の $P \in \mathcal{S}$ と任意の $w \in W$ に対して $Pw \in W$ が成立することである．

(1) $\mathcal{S}$ の元をすべて求めよ．

(2) $\mathcal{S}$ の共通固有ベクトルを一つ求めよ．

(3) $\mathcal{S}$-不変な $\mathbb{C}^3$ の 1 次元部分空間をすべて求めよ．

(4) $\mathcal{S}$-不変な $\mathbb{C}^3$ の部分空間をすべて求めよ．

$\boxed{5}$ ある集団における事柄 A（たとえば，ファッションや習慣）の採用者頻度の時間変動を表す数理モデルとして次の微分方程式を考える．

$$\frac{df(t)}{dt} = \{1 - f(t)\}\, f(t) - q\{f(t)\}^{1-\gamma}$$

時刻 t における事柄 A の採用者頻度を $f(t)$（$0 \leq f(t) \leq 1$）で表す．ただし，q と γ は正定数であり，$\gamma < 1$ とする．$f(0) = f_0 > 0$ として，次の問いに答えよ．

(1) この数理モデルにおける項 $q\{f(t)\}^{1-\gamma}$ の意味について述べよ．

(2) $f(t) \equiv 0$ 以外の定常状態が存在するための必要十分条件を求めよ．

(3) $f(t) \equiv 0$ 以外の定常状態が存在するときの，事柄 A の採用者頻度の時間変動の特性について述べよ．

$\boxed{6}$ k, n, r を正の整数とする．写像 $f\colon \{1, 2, \ldots, kn\} \to \{1, 2, \ldots, r\}$ について，次の性質 $(*)$ を考える．

$$(*) \quad i \not\equiv j \pmod{k} \implies f(i) \neq f(j) \qquad (1 \leq i, j \leq kn)$$

(1) $k = 2$ のとき，$r = 1, 2, 3$ それぞれに対して，$(*)$ を満たす全射 $f\colon \{1, 2, \ldots, 2n\} \to \{1, 2, \ldots, r\}$ の個数を求めよ．

(2) $r \leq k$ のとき，$(*)$ を満たす全射 $f\colon \{1, 2, \ldots, kn\} \to \{1, 2, \ldots, r\}$ の個数を求めよ．

(3) $r = k + 1$ のとき，$(*)$ を満たす全射 $f\colon \{1, 2, \ldots, kn\} \to \{1, 2, \ldots, r\}$ の個数を求めよ．

(4) $r = k + 1$ のとき，$(*)$ を満たす写像 $f\colon \{1, 2, \ldots, kn\} \to \{1, 2, \ldots, r\}$ の個数を求めよ．

$\boxed{7}$ N を自然数とする．1 から N まで数字が 1 つずつ書かれたカードが N 枚ある．これらの中から戻すことなく n 枚のカードを取り出したとき，それらの番号のうちの最大値を T とする．

(1) T の確率分布 $P(T=k)$ を求めよ．

(2) T の期待値を求めよ．

(3) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)T-1$ が N の不偏推定量であることを示せ．

$\boxed{8}$

(1) 複素平面上の有理型関数

$$f(z)=\frac{1}{z^6+1}$$

に対して，原点のまわりのべき級数展開を求めよ．

(2) 前問における $f(z)$ の上半平面 $\mathrm{Im}\, z>0$ における極およびその留数をすべて求めよ．

(3) 留数定理を用いて定積分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^6+1}$$

の値を求めよ．

$\boxed{9}$ $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数とする．関数 $y=y(x)$ に関する次の微分方程式 $(*)$ を考える．

$$(*)\quad y''+y'+f(x)y=0$$

$(*)$ の 2 つの解 $y_j(x)$ $(j=1,2)$ は次を満たすとする．

$$y_1(0)=1,\ y_1'(0)=0,\ y_2(0)=0,\ y_2'(0)=1$$

$\mathbb{R}$ 上の関数 $w=w(x)$ を次で定める．

$$w=y_1y_2'-y_2y_1'$$

(1) w の満たす微分方程式を見つけ，w を求めよ．

(2) 初期値問題

$$y''+y'+f(x)y=2f(x),\ y(0)=3,\ y'(0)=5$$

の解 $y=y(x)$ を y_1 と y_2 を用いて表せ．

(3) 2つの関数 $y = y_j(x)$ $(j = 1, 2)$ のグラフが2点 $(a, y_1(a)), (b, y_1(b))$ で交わり，開区間 (a, b) 上で不等式 $y_1(x) > y_2(x)$ が成り立つならば，$y_1(a) < 0 < y_1(b)$ となることを示せ．

$\boxed{10}$ $\mathbb{R}^3$ 上の微分形式 α, β を

$$\alpha = dx + \sin x\, dy + \cos x\, dz,$$
$$\beta = z\, dx \wedge dy + x\, dy \wedge dz - y\, dx \wedge dz$$

とおく．また，実数 $r > 0$ に対して

$$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\},$$
$$E = \{(t, \varphi, \psi) \mid 0 \leq t \leq r,\ 0 \leq \varphi \leq \pi,\ 0 \leq \psi \leq 2\pi\}$$

とする．また，$\Phi\colon E \to D$ を $\Phi(t, \varphi, \psi) = (t \sin\varphi \cos\psi, t \sin\varphi \sin\psi, t \cos\varphi)$ で定義する．

(1) $d\alpha$, $d\beta$, $\alpha \wedge d\alpha$ を求めよ．

(2) $\Phi^*(\alpha \wedge d\alpha)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_D (\alpha \wedge d\alpha)$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\int_{\partial D} \beta$ を求めよ．ただし，$\partial D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ である．

$\boxed{11}$ G を群とし，H, K を G の部分群とする．有限集合 A の要素の個数を $|A|$ で表すことにする．

(1) G の部分群 L が H を含むとき，$HK \cap L = H(K \cap L)$ が成り立つことを示せ．

(2) H, K が有限のとき，$|HK| = |H||K|/|H \cap K|$ が成り立つことを示せ．

(3) HK が必ずしも G の部分群とならないことを反例を挙げることにより示せ．