2021年8月

1 For a real number $\alpha > 1$, we consider the following function on $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{if } x > 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(1) Prove that $f(x)$ is differentiable at $x = 0$.

(2) Find the condition on α under which $f(x)$ is of class C^1 on $\mathbb{R}$.

(3) Find the condition on α under which $f(x)$ is of class C^1 but not twice differentiable on $\mathbb{R}$.

2 Answer the following questions concerning the matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) Diagonalize A.

(2) Find the polynomial $f(x)$ of smallest degree such that $A^{-1} = f(A)$.

(3) Find a real number b and a polynomial $g(x)$ such that the matrix

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 4b & -b & 6b \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

satisfies $B = g(A)$.

3 以下の極限を求めよ．ただし，log は自然対数を表す.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{n}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{k^3 - 1}{k^2 n}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{n^2} \left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{\ell}{n}\right) \sin\left(\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{\ell}{n}\right)^2\right)$

$\boxed{4}$ ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$ が生成する $\mathbb{R}^3$ の部分空間を W とする．
$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -5 \\ -4 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とし，V を A のすべての固有空間の和空間とする．

(1) W の基底を求めよ．

(2) V の基底を求めよ．

(3) W と V の共通部分 $W \cap V$ の基底と次元を求めよ．

(4) $W + V = \mathbb{R}^3$ を証明せよ．

$\boxed{5}$ 繁殖期に成熟雌 1 個体と成熟雄 1 個体からなるつがいを形成して有性繁殖を行うある生物集団について，n 年目の繁殖期の始めにおける成熟雌個体数を F_n，成熟雄個体数を M_n とするとき，成熟個体数の年次変動を表す次の数理モデルを考える．

$$F_{n+1} = \sigma_{\mathrm{F}} F_n + \sigma_{\mathrm{J}} \omega m \, \mathtt{min}\big[F_n, M_n\big]$$

$$M_{n+1} = \sigma_{\mathrm{M}} M_n + \sigma_{\mathrm{J}} (1-\omega) m \, \mathtt{min}\big[F_n, M_n\big]$$

ここで，$\sigma_{\mathrm{F}}, \sigma_{\mathrm{M}}$ は翌年の繁殖期までの成熟雌，成熟雄の生存率，m は繁殖期におけるつがいあたりの平均産仔数，ω は出生個体の雌比，σ_{J} は未成熟個体が翌年成熟するまでの生存率を表す．ただし，$0 < \sigma_{\mathrm{F}}, \sigma_{\mathrm{M}}, \omega, \sigma_{\mathrm{J}} < 1$, $m > 0$ である．また，$a \leq b$ のとき $\mathtt{min}[a, b] = \mathtt{min}[b, a] = a$ である．

(1) この数理モデルにおいて，繁殖期におけるつがい形成に関してどのような仮定が置かれているかについて述べよ．

(2) $F_1 = M_1$ のとき，$F_2 = M_2$ となるための条件は，

$$(*) \quad \sigma_{\mathrm{F}} + \sigma_{\mathrm{J}} \omega m = \sigma_{\mathrm{M}} + \sigma_{\mathrm{J}} (1-\omega) m$$

であることを示せ．

(3) $F_1 = M_1$ かつ $F_2 = M_2$ が成り立つとき，F_1 を用いて F_n と M_n（$n > 1$）を表せ．

(4) 条件 $(*)$ が成り立つとき，$F_1 \neq M_1$ の場合について，経年とともに，成熟雌と成熟雄の個体数 F_n と M_n の性比が $1:1$ に漸近することを示せ．

$\boxed{6}$ v, k, λ, b, r を正の整数とし $v > k > \lambda$ と仮定する．M を以下の条件を満たす $b \times v$ 実行列とする．

(i) M の成分は 0 または 1,

(ii) $MJ_{v\times v} = kJ_{b\times v}$,

(iii) $J_{b\times b}M = rJ_{b\times v}$,

(iv) ${}^tMM = (r-\lambda)E_v + \lambda J_{v\times v}$.

ここで E_v は v 次の単位行列，$J_{m\times n}$ はすべての成分が 1 である $m\times n$ 行列，${}^tM$ は M の転置行列を表す.

(1) $\det({}^tMM)$ を r, v, λ で表せ.

(2) $bk = vr$ を示せ.

(3) $r(k-1) = \lambda(v-1)$ を示せ.

(4) $b \geq v$ を示せ.

$\boxed{7}$ 区間 $[-1,1]$ 上の一様分布に従う独立な確率変数 X, Y に対して，それらの和 $Z = X+Y$ を考える.

(1) 確率変数 Z の平均値 $\mathbf{E}[Z]$ と分散 $\mathbf{V}[Z]$ を求めよ.

(2) 実数 u に対して，確率 $P(Z \leq u)$ を求めよ.

(3) 確率変数 Z の確率密度関数を求めて，そのグラフの概形を図示せよ.

$\boxed{8}$ 複素平面上の有理型関数

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{2+z^2}$$

について以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする.

(1) $z=0$ を中心とする $f(z)$ のベキ級数展開を z^3 の項まで求めよ.

(2) $f(z)$ の上半平面 $\mathrm{Im}\, z > 0$ における極およびその点における留数をすべて求めよ.

(3) 正数 R に対して Γ_R を円周 $|z| = R$ の上半分（上半平面との共通部分）とするとき,

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz \to 0 \quad (R \to +\infty)$$

であることを示せ.

(4) 留数定理を用いて次の積分の値を求めよ.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{2+x^2} dx$$

$\boxed{9}$ $f=f(t)$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数とし, 定数 $\alpha>0$ について $\lim_{t\to\infty} f(t)=\alpha$ とする. 今，$\mathbb{R}$ 上の 2 つの実数値 C^1 級関数 $x=x(t),\ y=y(t)$ が次を満たすとする.

$$\begin{cases} x' &= f(t)x - e^{-t}y - (x^2+y^2)x, \\ y' &= e^{-t}x + f(t)y - (x^2+y^2)y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) &= 1, \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

$\mathbb{R}$ 上の関数 $z=z(t)$ を次で定める.

$$z(t) = \{x(t)\}^2 + \{y(t)\}^2$$

(1) $z(t)$ の満たす微分方程式を求めよ.

(2) $z(t)^{-1}$ を考えることにより, $z(t)$ を関数 $F(t)=\int_0^t f(s)ds$ を用いて表せ.

(3) 極限 $\lim_{t\to\infty} z(t)$ を求めよ.

$\boxed{10}$ 3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ の標準内積を $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3)$ で表し，ベクトル $\boldsymbol{x}$ の長さを $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$ で定める．2 次元単位球面 $\mathbb{S}^2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, |\boldsymbol{x}| = 1\}$ を $\mathbb{R}^3$ の相対位相により位相空間とみなす．また，$\mathbb{R}^6$ の部分集合

$$V = \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \,\middle|\, |\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{y}| = 1,\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0 \right\}$$

も相対位相により位相空間とみなし，写像 $\pi : V \longrightarrow \mathbb{S}^2$ を $\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}$ $((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in V)$ と定める.

(1) V はコンパクトであることを示せ.

(2) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^2$ の逆像 $\pi^{-1}(\boldsymbol{x})$ は，円周と同相であることを示せ.

(3) V は $SO(3) = \left\{ A : \text{実 3 次正方行列} \,\middle|\, {}^tAA = E_3,\ \det A = 1 \right\}$ と同相であることを示せ．ただし，${}^tA$ は A の転置行列，E_3 は 3 次単位行列を表し，$SO(3)$ の位相は $\mathbb{R}^9$ の相対位相とする.

$\boxed{11}$ S_5 を 5 次対称群とする．$(1\ 2), (1\ 3\ 2\ 4) \in S_5$ で生成される S_5 の部分群を H とし，Z を H の中心とする．$X = \{g^{-1}Zg \mid g \in S_5\}$, $C = \{g \in S_5 \mid gx = xg\ (\forall x \in Z)\}$, $Y = \{g^{-1}Hg \mid g \in S_5\}$ とする.

(1) H の位数を求めよ.

(2) Z の位数を求めよ.

(3) X の元の個数を求めよ.

(4) C の位数を求めよ.

(5) Y の元の個数を求めよ.