2022年8月

$\boxed{1}$ Let $f(x,y) = \dfrac{e^{-e^{xy}}}{y}$.

(1) Find $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.

(2) Find the following integral:

$$\int_1^2 \left(\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx \right) dy.$$

(3) Find the following integral, by changing the order of integration of the integral in (2):

$$\int_0^\infty \frac{e^{-e^x} - e^{-e^{2x}}}{x}\,dx.$$

$\boxed{2}$ Let $\alpha \in \mathbb{C}$, and set $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 2 \\ 2 & 2 & \alpha \\ \alpha & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 3 \end{pmatrix}$, $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$.

(1) Find the condition on α under which the matrix A is nonsingular.

(2) Find all vectors $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^3$ satisfying $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ when the matrix A is singular.

(3) Find the condition on α under which the dimension of the subspace W is at least 1.

(4) Under the condition of (3), find a basis of W.

$\boxed{3}$

(1) $\mathbb{R}^2$ 内の閉領域 D 上で定義された C^2 級関数 $f(x,y)$ が D の内部において

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) > 0$$

を満たすとする．このとき D の内部で $f(x,y)$ が最大値を取らないことを示せ．

(2) 関数 $x^2 + y^2 - 2y$ の $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1\}$ 上での最大値を求めよ．

$\boxed{4}$ a, b を実数とし，$b \neq 0$ とする．I を 3 次単位行列とし，J は成分がすべて 1 である 3 次正方行列とする．また，$e_1, \ldots, e_6$ を $\mathbb{R}^6$ の標準基底とする．このとき 6 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} aI & bJ \\ bJ & aI \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ．

(1) $v_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $v_2 = e_4 + e_5 + e_6$ で生成された $\mathbb{R}^6$ の部分空間を W とおくとき，W は A で不変であることを示せ．

(2) A が誘導する W から W への線形写像について，基底 v_1, v_2 に関する表現行列を求めよ．

(3) A はちょうど 3 個の相異なる固有値をもつことを示せ．

(4) A が正則行列となるための条件を求め，A が正則行列のとき A の逆行列を求めよ．

$\boxed{5}$ ある集団における感染症の罹患者頻度の日変動を与える次の数理モデルを考える．

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k e^{-\beta I_k} + q I_k; \\ I_{k+1} &= S_k(1 - e^{-\beta I_k}) + (1-q) I_k \end{aligned}$$

S_k および I_k は k 日目における集団内の非感染者と感染者の頻度を表す（$k = 0, 1, 2, \ldots$）．パラメータ β と q は $\beta > 0$, $0 < q < 1$ を満たす．また，$I_0 > 0$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) パラメータ q の意味を述べよ．

(2) k 日目の感染者が回復するまでの期待日数を求めよ．

(3) 任意の $k \geq 0$ に対して $I_k = I^*$ が成り立つような正の値 I^* が存在するための必要十分条件を求めよ．

$\boxed{6}$ n を 2 以上の整数とする．成分が $1, -1$ のみからなる n 次元のベクトル全体の集合を $\{\pm 1\}^n$ で表し，$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{\pm 1\}^n$ に対して，これらを $\mathbb{R}^n$ のベクトルと考えたときの通常の内積を $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ と書くことにする．このとき，次の条件

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n \in \{\pm 1\}^n \\ &\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = 0 \quad (1 \leq i < j \leq n) \end{aligned} \qquad (*)$$

を満たす n 個のベクトル $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ の存在について考える．

(1) $n = 2$ のとき，条件 $(*)$ を満たす 2 個のベクトル $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ の組をすべて求めよ．

(2) $n = 3$ のとき，条件 $(*)$ を満たす 3 個のベクトル $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ は存在しないことを示せ．

(3) $n = 2^k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ のとき，条件 $(*)$ を満たす 2^k 個のベクトル $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_{2^k}$ が存在することを示せ．

$\boxed{7}$ 確率変数 Y の確率密度関数を

$$f_Y(y) = \begin{cases} 8y & 0 \leq y \leq \dfrac{1}{2}, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と定義し，確率変数 U を $U = -2Y + 1$ と定義する．

(1) U の確率密度関数を求めよ．

(2) U の平均値 $\mathbf{E}(U)$ と分散 $\mathbf{V}(U)$ を求めよ．

$\boxed{8}$

(1) 実数 $R > 1$ に対して条件 $0 < \arg z < \dfrac{2\pi}{5}$, $0 < |z| < R$ により定まる領域を D_R と表す．複素平面上の有理型関数

$$f(z) = \frac{1}{z^5 + 1}$$

の D_R における極とその留数をすべて求めよ．

(2) Γ_R を $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \dfrac{2\pi}{5})$ でパラメータ付けされた曲線とするとき，

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^5 + 1} = 0$$

であることを示せ．

(3) 留数定理を用いて定積分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^5 + 1}$$

の値を求めよ．ただし，必要に応じて公式 $\cos \dfrac{\pi}{5} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}$ を証明なしに用いてもよい．

$\boxed{9}$ 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 + y$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 解をすべて求めよ．

(2) $y(0) = a$ $(0 < a < 1)$ のもとで解を求めよ．

(3) (2) の解のグラフを描け．

$\boxed{10}$ 実 2 次正方行列全体の集合を $M(2;\mathbb{R})$ とする．$M(2;\mathbb{R})$ を 4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ と同一視して位相空間とみなす．また，$M(2;\mathbb{R})$ の部分集合

$$
\begin{aligned}
GL(2;\mathbb{R}) &= \{X \in M(2;\mathbb{R}) \mid \det X \neq 0\},\\
SL(2;\mathbb{R}) &= \{X \in M(2;\mathbb{R}) \mid \det X = 1\},\\
SO(2;\mathbb{R}) &= \{X \in M(2;\mathbb{R}) \mid {}^tX\,X = I\} \cap SL(2;\mathbb{R})
\end{aligned}
$$

をそれぞれ相対位相で位相空間とみなす．ただし，$\det X$ は X の行列式，${}^tX$ は X の転置行列，I は 2 次単位行列とする．

(1) $GL(2;\mathbb{R})$, $SL(2;\mathbb{R})$, $SO(2;\mathbb{R})$ は $M(2;\mathbb{R})$ の開集合，閉集合，あるいはどちらでもないかを理由を付けて答えよ．

(2) $GL(2;\mathbb{R})$, $SL(2;\mathbb{R})$, $SO(2;\mathbb{R})$ はコンパクトであるかどうかを理由を付けて答えよ．

(3) $SO(2;\mathbb{R})$ は，単位円周 $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ と同相であることを示せ．

$\boxed{11}$ G を有限群とし，G の位数は 3 で割り切れないとする．写像 $\varphi : G \to G,\ a \mapsto a^3$ が群準同型になっていると仮定する．

(1) φ は同型写像であることを証明せよ．

(2) $x, y \in G$ に対して，次の等式が成立することを証明せよ．

(a) $(xy)^2 = y^2x^2$.

(b) $[x,y]^3 = [x^3, y]$.

(c) $[x,y]^2 = [y, x^{-2}]$.

(d) $[x,y]^6 = 1$.

ただし，1 は G の単位元とし，$[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$ とする．