2023年8月

$\boxed{1}$ For $x, y \in \mathbb{R}$, set

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^y}{x - y} & \text{if } x \neq y, \\ e^x & \text{if } x = y. \end{cases}$$

For $a \in \mathbb{R}$, answer the following questions.

(1) Show that the function $f(x,y)$ is continuous at (a,a).

(2) Find the partial derivatives $f_x(a,a)$ and $f_y(a,a)$.

(3) Show that the function $f(x,y)$ is totally differentiable at (a,a).

$\boxed{2}$ For the matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 & -7 \\ 2 & -2 & 5 & -6 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, consider the linear mapping $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ defined by $f(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$ ($\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^4$).

(1) Find a basis of the kernel $W = \mathrm{Ker}(f)$ of the linear mapping f.

(2) Find an orthonormal basis of the orthogonal complement $W^\perp$ of W in $\mathbb{R}^4$ with respect to the standard inner product on $\mathbb{R}^4$.

(3) For the vector $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^4$, find the vectors $\boldsymbol{w} \in W$ and $\boldsymbol{w}' \in W^\perp$ such that $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}'$.

$\boxed{3}$ n を正の整数とし，$(s,t) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\varphi_n(s,t) = \begin{cases} \dfrac{s^3 t \sin(n\pi st)}{s^2 + t^2} & (s,t) \neq (0,0) \\ 0 & (s,t) = (0,0) \end{cases}$$

とする．領域 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$ 上の関数 $f_n(x,y)$ を

$$f_n(x,y) = \iint_{[0,x]\times[0,y]} \varphi_n(s,t)\, dsdt$$

と定める．ただし，$[0,x] \times [0,y] = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s \leq x,\ 0 \leq t \leq y\}$ である．

(1) $\varphi_n(s,t)$ が $(s,t)=(0,0)$ において連続であることを示せ．

(2) 偏導関数 $\dfrac{\partial f_n}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f_n}{\partial y}(x,y)$ を 1 変数の積分により表せ．

(3) $x>0$ に対して $g_n(x)=f_n(x,x)$ と定めるとき，$\dfrac{dg_n}{dx}(x)$ を求めよ．

(4) 開区間 $(0,1)$ において，(3) で定めた関数 $g_n(x)$ が極値をとる点の個数を n で表せ．

4

(1) a,b を実数とし，$b\neq 0$ とする．3 つの行列の積

$$\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}$$

が対角行列になるような実数 x を求めよ．

(2) a,b を実数とし，$b>0$ とする．このとき，行列

$$\begin{pmatrix}a & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$$

が正定値になるための必要十分条件を求めよ．

(3) n を正の整数，A,B を n 次実対称行列とする．$2n$ 次実対称行列

$$\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}$$

が正定値になるには，A,B がいずれも正定値であることが必要十分であることを示せ．ただし，O は零行列である．

(4) n を正の整数，A,B を n 次実対称行列とし，B は正定値とする．$2n$ 次実対称行列

$$\begin{pmatrix}A & I\\ I & B\end{pmatrix}$$

が正定値になるには，$A-B^{-1}$ が正定値であることが必要十分であることを示せ．ただし，I は単位行列である．

5

時刻 t におけるある生物資源の現存量を $N(t)$ で表す．その生物資源現存量の 50% を時間周期 T で繰り返して消費する．

$$\lim_{t\to kT+0} N(t) = 0.5\left\{\lim_{t\to kT-0} N(t)\right\} \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

ただし，$t \in (kT, (k+1)T)$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ における生物資源の増殖は次の常微分方程式で与えられ，$\lim_{t \to -0} N(t) = 1$ とする．

$$\frac{dN(t)}{dt} = \{1 - N(t)\}\, N(t)$$

(1) 時刻 $t \in (0, T)$ における $N(t)$ を t の関数として表せ．

(2) $N_+(k) = \lim_{t \to kT+0} N(t)$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ と表すとき，$N_+(k+1)$ と $N_+(k)$ の関係式を導け．

(3) 生物資源が枯渇に向かわないための消費周期 T についての条件を求めよ．

6

$\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ を 2 つの元からなる体とする．すなわち，

$$0+0 = 1+1 = 0, \quad 0+1 = 1+0 = 1, \quad 0 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1$$

として計算を行う．n を 2 以上の整数とし，$\mathbb{F}_2$ 上の n 次元ベクトル空間 $\mathbb{F}_2^n$ を考える．

(1) $\mathbb{F}_2^n$ に属するベクトルの個数を n で表せ．

(2) 零ベクトルと異なる 2 つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{F}_2^n$ について，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が $\mathbb{F}_2$ 上一次従属であるには $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ が必要十分であることを示せ．

(3) 次の集合の元の個数を n で表せ．

$$\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{F}_2^n,\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \text{ は } \mathbb{F}_2 \text{ 上一次独立}\}$$

(4) $\mathbb{F}_2^n$ の 2 次元部分空間の個数を n で表せ．

7

次の線形回帰モデル

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

を考える．ここで，ϵ_i は平均 0，分散 σ^2 の正規分布に従うと仮定する．

(1) 回帰係数 β_1 の最尤推定量を求めよ．

(2) (1) で求めた最尤推定量が β_1 の不偏推定量であるかどうかを理由をつけて答えよ．

8

正の整数 n に対して n 次多項式

$$P_n(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$$

を考える．

(1) 複素平面における $P_n(z)$ の零点をすべて求めよ．

(2) 円周 $|z|=2$ 上において不等式

$$|P_n(z)| \leq 2^{n+1}-1$$

が成り立つことを示せ．

(3) a が $|a|<1$ を満たす複素数であるとき，方程式

$$P_5(z)=a$$

の円板 $|z|<2$ における（重複度を込めた）解の個数を求めよ．

$\boxed{9}$ 常微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=1-y^2$$

を考える．

(1) 解をすべて求めよ．

(2) $y(0) \geq -1$ のとき，極限 $\lim_{x\to\infty} y(x)$ を求めよ．

(3) $y(0) < -1$ のとき，解のグラフの概形を描け．

$\boxed{10}$ $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$M_{x,y} = \begin{pmatrix} y(1-x) & y^2 \\ y & x \end{pmatrix}$$

とおく．$k=0,1,2$ に対して

$$T_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \operatorname{rank} M_{x,y} = k\} \subset \mathbb{R}^2$$

を考える．ここで，$\operatorname{rank} M$ は行列 M の階数（ランク）を表す．2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ には通常の位相を入れ，相対位相により T_k $(k=0,1,2)$ を $\mathbb{R}^2$ の部分空間とみなす．

(1) $k=0,1,2$ に対して，T_k を図示せよ．

(2) $k=0,1,2$ に対して，T_k は $\mathbb{R}^2$ の開集合，閉集合，あるいはどちらでもないかを理由をつけて答えよ．

(3) $k=0,1,2$ に対して，T_k は連結かどうかを理由をつけて答えよ．

(4) $k=0,1,2$ に対して，T_k はコンパクトであるかどうかを理由をつけて答えよ．

$\boxed{11}$ nを正の整数とし，S_nをn次対称群，すなわち，集合$\{1, 2, \ldots, n\}$の上の置換全体の成す群とする．kを$1 \leq k < n$を満たす正の整数とし，S_nの部分集合N, Cを次のように定義する．

$$N = \{\sigma \in S_n \mid \{\sigma(1), \ldots, \sigma(k)\} = \{1, \ldots, k\}\},$$
$$C = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1, \ldots, \sigma(k) = k\}$$

(1) NがS_nの部分群であることを示せ.

(2) CがNの正規部分群であることを示せ.

(3) 商群N/Cがk次対称群と同型であることを示せ.

(4) $n = 2m$を偶数とし，m個の要素から成る$\{1, 2, \ldots, n\}$の部分集合全体の成す集合をX_mで表す．$A \in X_m$に対してAの$\{1, 2, \ldots, n\}$における補集合をA^cと書く．$m \geq 2$のとき，次の性質を満たす置換$\sigma \in S_n$が存在しないことを示せ.

$$\text{すべての}\ A \in X_m\ \text{に対して}\ \{\sigma(a) \mid a \in A\} = A^c$$