1999 年 3 月

1

n 次実正方行列 $P = (p_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ が

$$\text{(i)} \qquad p_{ij} \ge 0 \qquad \text{(すべての } i, j \text{ について)},$$
$$\text{(ii)} \qquad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \qquad \text{(すべての } i \text{ について)}$$

を満たすとする。このとき次を示せ。

(1) P は 1 を固有値に持つ。

(2) P の任意の固有値 λ は $|\lambda| \le 1$ を満たす。

(3) $n = 2$ のとき、$P^2 \ne I$ (I は単位行列) ならば、-1 は P の固有値でない。

(4) 2 つの n 次正方行列 P と Q が上の性質 (i), (ii) を満たすなら、積 $R = PQ$ もそうである。

2

(1) 関数 f は区間 (a, b) において微分可能であって、

$f(a+0) = \lim_{h \to +0} f(a+h)$ が存在するものとする。

$$f'(a+0) = \lim_{h \to +0} f'(a+h)$$

が存在するとき、a における右側微分係数

$$f'_{+}(a) = \lim_{h \to +0} \frac{f(a+h) - f(a+0)}{h}$$

は存在するか？

(2) 関数 g を

$$g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

で定義する。

$$g(0+0) = g(+0), \quad g'(0+0) = g'(+0), \quad g'_{+}(0)$$

を求めよ。

3

G を位数 n の有限群、H を G の指数 d の部分群とする。次の主張 (1) から (6) について、成立するか、しないかを答え、成立するものについてはその証明を、成立しないものについては反例をあげよ。なお、群の演算は乗法で表している。

(1) すべての $x \in G$ は $x^n = e$ をみたす (e は G の単位元である)。

(2) G は位数 n の元をもつ。

(3) p が n の素因数ならば、G は位数 p の元をもつ。

(4) すべての $x \in G$ に対して、$x^k \in H$ となる $1 \le k \le d$ が存在する。

(5) すべての $x \in G$ は $x^{d!} \in H$ をみたす。

(6) すべての $x \in G$ は $x^d \in H$ をみたす。

4

(1) $\boldsymbol{Q}$ を有理数体とする。 $\boldsymbol{Q}(\sqrt[4]{1999})$ を含む最小の $\boldsymbol{Q}$ 上のガロア拡大体において、$\boldsymbol{Q}$ 上のガロア拡大となっている中間体をすべて求めよ。

(2) 体 K 上の方程式 $x^n - a = 0$ の K 上の最小分解体を L とするとき、 K が 1 の原始 n 乗根を含めば、ガロア群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ は巡回群となることを示せ。

5

(1) リー群 $S = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & \xi \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} ;\ t, \xi \in \boldsymbol{R} \right\}$ が　$\boldsymbol{H} = \{ z = x + \sqrt{-1} y\ ;\ x, y \in \boldsymbol{R},\ y > 0 \}$ 上に

$$\begin{pmatrix} e^t & \xi \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot z = e^t (e^t z + \xi)$$

により推移的に作用することを示せ。

(2) $\boldsymbol{H}$ 上のリーマン計量 g :

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

について上の作用は等長であることを示せ。

(3) $X = \begin{pmatrix} a & \xi \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ に対して、$\exp(tX) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} X^n$ $(t \in \boldsymbol{R})$ とするとき、$\boldsymbol{H}$ 内の曲線

$c(t) = \exp(tX) \cdot \sqrt{-1}$ を求めよ。

6

(1) 同相である 2 つの位相空間は、ホモトピー同値であることを示せ。

(2) A から Z のアルファベットの文字に、位相空間としての自然な位相を与える。このとき、次を示せ。

(a)　T の文字と I の文字はホモトピー同値であるが、同相ではない。

(b)　T の文字と P の文字はホモトピー同値でも、同相でもない。

7

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad (x \neq 0)$$

と置き

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & (x = 0) \\ \dfrac{x \coth x - 1}{x^2} & (x \neq 0) \end{cases}$$

と定める。

(1) $f(x)$ は $\boldsymbol{R}$ 上 C^∞ 関数である。

(2) 任意の $n \geq 0$ に対して $\sup_x |f^{(n)}(x)| < \infty$

となることを示せ。

8

$u = u(x,t)$ はバーガーズ方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad t > 0,\ x \in \boldsymbol{R}$$

を満たすとする。ただし、c は正の定数である。

(1) ある正値関数 φ があって

$$u = -2c\frac{\partial}{\partial x}(\log \varphi)$$

と書けているとする。φ の満たす方程式を導け。

(2) u の初期値関数を $u(x,0) = f(x)$ とするとき $u(x,t)$ を計算せよ。

9

l^2 は $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < +\infty$ である複素数列 (ξ_n) のなすヒルベルト空間とする。ただし内積は

$$< x, y >= \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \bar{\eta}_n \quad (x = (\xi_n),\ y = (\eta_n) \in l^2).$$

$0 < p < 1$ として、l^2 上の線形作用素

$$Ax = (0, p\xi_1, p^2\xi_2, p^3\xi_3, \cdots) \qquad (x = (\xi_n) \in l^2)$$

について、次の問いに答えよ。

(1) A はコンパクト作用素であることを示せ。

(2) A^*A の固有値をすべて求めよ。

(3) $\| A + A^* \|$ の範囲をできるだけ限定せよ。($\| A + A^* \|$ の正確な値は求めなくてよい。)

10

$X_1, X_2, \ldots$ は独立同分布で

$$\begin{aligned} P(X_i = 1) &= p \\ P(X_i = 0) &= 1 - p \end{aligned}$$

であるとする。f は $[0,1]$ 上で連続であるとする。

(1) $P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \frac{k}{n}\right)$ を計算せよ。ただし、$k = 0, 1, 2, \ldots, n.$

(2) $\lim_{n\to\infty} E\left[f\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right)\right]$ を求めよ。

(3) 以上より $f(x)$ の多項式近似列 $\{P_n(x)\}$ が 1 つ定まる。$P_n(x)$ を求めよ。