1999 年 8 月

$\boxed{1}$ （基礎問題）

行列 A と多項式 $g(x)$ をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 3 & 0 \\ 9 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g(x) = 2x^5 - 27x^4 + 91x^3 - 93x^2 + 28x - 2$$

とし、$B = g(A)$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 行列 A の固有値と固有空間を求めよ。

(2) 行列 B の固有値と行列式を求めよ。

$\boxed{2}$ （基礎問題）

ガンマ関数 $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\,(x>0)$ について次を示せ。

(1) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (x>0)$

(2) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)}dudv$

(3) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

(4) n が自然数のとき、$\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$

$\boxed{3}$ （基礎問題）

次の各問に答えよ。

(1)　閉区間 $[\alpha, \beta]$ 上の連続関数 $f(x)$ が、$c\,(\alpha < c < \beta)$ を除き微分可能でかつ

$$\lim_{x \to c} f'(x) = b$$

のとき、$f(x)$ は $x = c$ においても微分可能で $f'(c) = b$ となることを、
平均値の定理を用いて示せ。

(2)　関数 $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\ (x > 0)$ の n 次導関数は

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} f(x)$$

で与えられることを示せ。ただし、$P_n(x)$ は x の多項式で $P_n(0) = 2^n$ をみたす。

(3)　関数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

は原点において無限回微分可能であることを示せ。

$\boxed{4}$ （基礎問題）

印刷機と製本機が 1 台ずつある。3 種類の本 I_1, I_2, I_3 を作る。印刷に必要な時間はそれぞれ a_1, a_2, a_3 時間、製本に必要な時間はそれぞれ b_1, b_2, b_3 時間である。

どの順番に作ったら最も短時間で全部の作業を終えることができるか知りたい。

ただし、どの本も印刷が完全に終わらないと製本を始められない。また、ある本の作業をしている機械は、その作業が終わらないと次の本の作業を始められない。

(1) $I_1,\ I_2,\ I_3$ の順番に作業をする時、I_2 の仕事が終了する時間を a_1, a_2, b_1, b_2 および記号 $\max, \min$ を用いて表せ。

(2) $I_1,\ I_2,\ I_3$ の順番に作業をする時、全部の仕事が終了する時間を $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ と $\max, \min$ を用いて表せ。

(3) $I_1,\ I_2,\ I_3$ の順番と $I_1,\ I_3,\ I_2$ の順番にした場合を比較する。
$\min\{a_2, a_3, b_2, b_3\} = a_2$ である場合には I_2 を、$\min\{a_2, a_3, b_2, b_3\} = b_2$ である場合には I_3 を先にする方が全部の仕事が早く終わる（逆にした場合と同じ時間の場合も含む）ことを示せ。

(4) 最も短時間で全部の作業を終えることができる順序の決め方を述べよ。

$\boxed{5}$

G をアーベル群で (群の演算は加法で表す), x, y, z で生成され, 次の関係で定義されるものとする。

$$\begin{cases} 15x + 3y & = & 0 \\ 3x + 7y + 4z & = & 0 \\ 18x + 14y + 8z & = & 0 \end{cases}$$

(1) G は 2 つの巡回群の直和になることを示せ。
(2) G の位数 4 の元をすべて求めよ。

$\boxed{6}$

p を奇素数, $m = (-1)^{\frac{p-1}{2}}p$, $\mathbb{Z}$ を有理整数環とし, 環 R を

$$R = \{\ a + b\frac{1+\sqrt{m}}{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\ \},$$

$\mathbb{Z}$ 係数の多項式 $f(x)$ を

$$f(x) = x^2 - x + \frac{1-m}{4}$$

とおく. また環 A と $a \in A$ に対して, a で生成される A の単項イデアルを aA で表す. このとき次の問いに答えよ.

(1) $\mathbb{Z}[x]$ で $\mathbb{Z}$ 係数の多項式環を表す. このとき $\mathbb{Z}[x]/f(x)\mathbb{Z}[x]$ と R は同型であることを示せ.

(2) Q を R の極大イデアルとするとき, ある素数 q が存在して $q\mathbb{Z} = Q \cap \mathbb{Z}$ となることを示せ.

(3) q を素数, $\mathbb{F}_q = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ の各係数を $\bmod q$ で考えて得られる $\mathbb{F}_q$ 係数の多項式を $\bar{f}(x)$ で表す. $\bar{f}(x)$ が $\mathbb{F}_q$ 係数の多項式環 $\mathbb{F}_q[x]$ で既約ならば, qR は R の極大イデアルとなることを示せ.

(4) $p \equiv 3$ または $5 \pmod 8$ ならば, $2R$ は R の極大イデアルとなることを示せ.

$\boxed{7}$

(1)　(x,y) 平面上のリーマン計量 $g = dx^2 + dy^2$ とベクトル場

$$X(x,y) = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

について、X が g のキリング・ベクトル場となるための ξ, η の条件を求めよ。ただし、X が g のキリング・ベクトル場であるとは、任意のベクトル場 Y, Z について

$$X(g(Y,Z)) = g([X,Y],Z) + g(Y,[X,Z])$$

をみたすもののことである。

(2)　X, Y が共に g のキリング・ベクトル場ならば、$aX + bY$　(ただし a, b は実数) 及び $[X,Y]$ もそうであることを示せ。

$\boxed{8}$

(1) 位相多様体の定義を述べよ。

(2) 3次元ユークリッド空間の原点を通る直線全体からなる空間を M とする。

(a)M は位相多様体であることを示せ。

(b)M はどのような多様体と同相であるか。証明を付けて答えよ。

$\boxed{9}$

(1)　X をノルム空間，M をその閉部分空間とする．$\boldsymbol{a} \notin M$,　$\boldsymbol{m} \in M$ とスカラー λ に対して，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{m} + \lambda\boldsymbol{a}$ と置くとき

$$|\lambda| \leq \frac{\|\boldsymbol{x}\|}{d(\boldsymbol{a}, M)}$$

を示せ．ここで，$\|\quad\|$ は X におけるノルム，$d(\boldsymbol{a}, M)$ は $\boldsymbol{a}$ と M の間の距離を表す．

(2)　ノルム空間 X 上の恒等的には 0 でない線形汎関数 f に対して，$\boldsymbol{a} \notin \ker f$ をとれば，X の各ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\ker f$ のベクトル $\boldsymbol{m}$ とスカラー λ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{m} + \lambda\boldsymbol{a}$$

と一意に表されることを示せ．

(3)　ノルム空間 X 上の線形汎関数 f が有界であるためにはその核空間 $\ker f$ が閉集合であることが必要十分であることを示せ．

$\boxed{10}$

3つの状態 $s_1,\ s_2,\ s_3,$ をとりうる微生物がいるとする。時刻 $n\,(n=0,1,2,\ldots)$ で状態 s_i であった微生物が時刻 $n+1$ で状態 s_j に変化している確率は p_{ij} (各個体にも時刻にもよらない定数) で与えられるとする。

行列 $P=(p_{ij})$ が次で与えられるとする。

$$P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

(1)　時刻 0 のときに状態 s_1 であった微生物が $n=2$ のとき、やはり状態 s_1 である確率を求めよ。

(2)　時刻 n のとき、状態 $s_1,\ s_2,\ s_3$ にある確率をそれぞれ $q_{1,n},\ q_{2,n},\ q_{3,n}$ とする。時刻 $n+1$ での確率 $q_{1,n+1},\ q_{2,n+1},\ q_{3,n+1}$ を $q_{1,n},\ q_{2,n},\ q_{3,n}$ を用いて表せ。

(3)　$\lim_{n\to\infty} q_{1,n}$ が存在するならば、この極限値を求めよ。

$\boxed{11}$

2 変数関数 $H(p)$ $(p=(p_1,p_2)\in\mathbf{R}^2)$ が凸関数、すなわち以下が成立するとする。

$$H(mp+(1-m)q)\le mH(p)+(1-m)H(q)\quad \forall p,q\in\mathbf{R}^2,\quad \forall 0\le m\le 1\quad (\text{凸関数の定義})$$

この時、以下の問いに答えよ。

(i)　2 変数関数 $H^*(p)$ $(p=(p_1,p_2)\in\mathbf{R}^2)$ を

$$H^*(p)=\sup_{q\in\mathbf{R}^2}\{<p,q>-H(q)\}$$

(ただし $<\cdot,\cdot>$ は $\mathbf{R}^2$ の内積) と定義すると、$H^*(p)$ も凸関数となることを証明せよ。

(ii)　特に $H(p)=||p||^2$ ($||\cdot||$ は $\mathbf{R}^2$ のノルム) のとき、(i) で定義された $H^*(p)$ を求めよ。

(iii)　$H(p)$ が C^1 級であるとき (i) で定義した $H^*(p)$ を用いて

$$H(p)=\sup_{q\in\mathbf{R}^2}\{<p,q>-H^*(q)\}$$

と表されることを証明せよ。

$\boxed{12}$

空間 X を距離 d を持つ完備距離空間とする。写像 Φ が次の 2 つの条件を満たすとき、Φ を X 上の縮小写像という。

(a) 任意の $u \in X$ に対して $\Phi(u) \in X$.

(b) $0 < \theta < 1$ なる θ が存在し、任意の $u, v \in X$ に対して

$$d(\Phi(u), \Phi(v)) \leq \theta d(u, v).$$

(I) Φ が X 上の縮小写像であるとき、$\Phi(u) = u$ となる不動点 u が X に一意的に存在することを示せ。

(II) T, R を正の実数とし、空間 $X(T, R)$ とその距離 d を次で定める：

$$X(T, R) := \{u \in C([0, T])\ ;\ \sup_{t \in [0,T]} |u(t)| \leq R\}$$

$$d(u, v) := \sup_{t \in [0,T]} |u(t) - v(t)|, \quad \forall u, v \in X(T, R).$$

ここで、$C([0, T])$ は区間 $[0, T]$ 上の実数値連続関数の集合を表す。今 p を実数として、$X(T, R)$ から $C([0, T])$ への写像 Φ を次で定義する。

$$(\Phi(u))(t) := p \exp(-t) + \int_0^t \exp(-(t-s)) u^2(s) ds, \quad u \in X(T, R), \quad t \in [0, T].$$

(i) $\Phi(u) = u$ となる不動点 u は次の非線型常微分方程式を満たすことを示せ。

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = -u(t) + u^2(t), \quad t \in (0, T) \\ u(0) = p \end{cases}$$

(ii) Φ に対する次の評価を示せ。

$$\sup_{t \in [0,T]} |(\Phi(u))(t)| \leq |p| + TR^2, \quad \forall u \in X(T, R).$$

$$d(\Phi(u), \Phi(v)) \leq 2TRd(u, v), \quad \forall u, v \in X(T, R).$$

(iii) (ii) を利用して、Φ が $X(T, R)$ 上の縮小写像となるような $T > 0, R > 0$ が存在することを示せ。