2024年8月 (August 2024)

$\boxed{1}$ Let $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 4,\ x^2 + 4(y - \frac{1}{2})^2 \geq 1\}$.

(1) Depict the region D in the xy-plane.

(2) Find the Jacobian determinant for the change of variables $x = 2r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$.

(3) Depict the set of points in the domain $\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\}$ in the $r\theta$-plane that are mapped to the interior of D by the change of variables in (2).

(4) Evaluate the following double integral:

$$\iint_D (x^2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}}\, dxdy.$$

$\boxed{2}$ Let $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Find the eigenvalues and their eigenvectors of A.

(2) Let λ denote the largest eigenvalue of A. Find the following limit:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda^n} A^n.$$

$\boxed{3}$ $f(x)$ を開区間 I 上の凸関数とする．すなわち，任意の $x, y \in I$ と任意の $0 \leq t \leq 1$ に対して，

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

を満たすとする．

(1) I 内の任意の3点 $x_1 < x_2 < x_3$ に対して，$(1-t)x_1 + tx_3 = x_2$ を満たす t を x_1, x_2, x_3 を用いて表せ．

(2) I 内の任意の3点 $x_1 < x_2 < x_3$ に対して，不等式

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

が成立することを示せ．

(3) $f(x)$ は I 上連続であることを示せ．

(4) $f(x)$ は I の各点 x において，右側微分可能かつ左側微分可能であり，右側微分係数 $f'_+(x)$ と左側微分係数 $f'_-(x)$ が $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ を満たすことを示せ．

$\boxed{3}$ Let $f(x)$ be a convex function on an open interval I. That is, for any $x, y \in I$ and any $0 \leq t \leq 1$, $f(x)$ satisfies the following inequality:

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

(1) For any three points $x_1 < x_2 < x_3$ in I, express t satisfying $(1-t)x_1 + tx_3 = x_2$ in terms of x_1, x_2, and x_3.

(2) For any three points $x_1 < x_2 < x_3$ in I, prove the following inequality:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

(3) Prove that $f(x)$ is continuous on I.

(4) Prove that $f(x)$ is left and right differentiable at any point $x \in I$, and that the right derivative $f'_+(x)$ and the left derivative $f'_-(x)$ satisfy $f'_-(x) \leq f'_+(x)$.

$\boxed{4}$ n を 2 以上の整数とし，$\mathbb{R}^n$ の列ベクトル v から作られる行列 $A = v\,{}^t v$ を考える．ただし，${}^t v$ は v の転置である．

(1) A の階数を求めよ．

(2) $\mathbb{R}^n$ の任意の列ベクトル x に対して，${}^t x A x \geq 0$ となることを示し，A の固有値は全て 0 以上となることを示せ．

(3) $\mathbb{R}^n$ の一次独立な列ベクトル y, z に対して，行列 $y\,{}^t y + z\,{}^t z$ の階数は 2 であることを示せ．

$\boxed{4}$ Let n be an integer at least two, and consider the matrix $A = v\,{}^t v$ constructed from a column vector v in $\mathbb{R}^n$, where ${}^t v$ is the transpose of v.

(1) Find the rank of A.

(2) Show that ${}^t x A x \geq 0$ for any column vector x in $\mathbb{R}^n$, and prove that all eigenvalues of A are non-negative.

(3) For linearly independent column vectors y and z in $\mathbb{R}^n$, show that the rank of the matrix $y\,{}^t y + z\,{}^t z$ is equal to 2.