「役に立つ数学」の分野を駆ける

徳山 豪

日本IBM東京基礎研究所主任研究員

中学や高校の頃，社会に出てもぜんぜん役立ちそうもない数学を，どうして勉強するのだろうと，疑問をもった人は少なくないはずだ。「数学は美学である」。役に立たないことが学問としての数学の価値であると数学者自身も考えているくらいである。しかし，「役に立つ数学」を目指す数学者が現れた。今回紹介する徳山豪さんである。

伝統的な純粋数学の分野は，小さいころから培われた才能がものをいう。東大の数学科に進んだとき，小学校の頃から数学の専門書をランドセルに持ち歩いていたという同級生たちの存在を知り，徳山さんはがく然としたという。それでも，大学院に行くことをあきらめなかった。そして，あるとき偶然に出会ったのが，数学とコンピュータ・サイエンスとが重なり合う応用数学の世界だった。

コンピュータは幾何が苦手だ。しかし，世の中には幾何学的な問題がたくさんある。電子回路を上手に設計するにはどうしたらよいか。空港での航空管制を能率よく行うためにはどうしたらよいかなど。こうした幾何の問題をコンピュータに素早く解かせるには，効率のよいプログラムを書く必要がある。そこで登場するのが，数学者の発想をいかしたコンピュータ・サイエンスだ。

日本の大学では純粋数学を教える所はたくさんある。だが，こうしたコンピュータ・サイエンスにつながる応用数学の分野はまだ未発達だという。徳山さんは，日本でのこの分野の先駆者の一人なのだ。

「大学院の頃，就職先がなかなかなくて。コンピュータの世話をするなら就職できるという大学はありました。でも，それはいやで……。ところが皮肉というか，結局はコンピュータの会社に入ることになった」と，徳山さんはＩＢＭの基礎研究所を職場に選んだ経緯を語る。

大学に比べて自由に研究できるところがよい。会議や雑用も少ない。時間も自分で決められる。もっとも，研究上のノルマは厳しい。毎年，国際的に評価の高い学会やセミナーで論文発表することが義務づけられている。「それでも，アメリカの大学の厳しさと比べれば，たいしたことはありませんけどね」という。

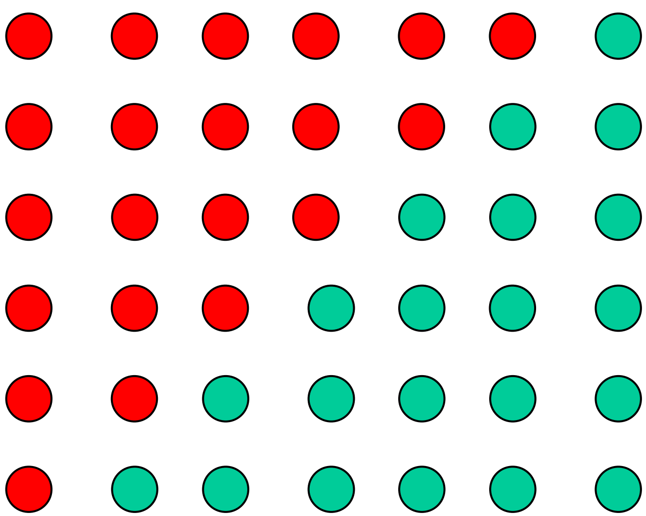
中高校生向けに書いた応
門書『はみだし幾何学』の
徳山さんの夢が語られて
の夢は，自分の作ったアル
その電子回路の中枢部に入
製作者の友人として鉄腕ア
に立ち会うこと」。こうし
する若い数学者が，徳山さ
現れる日も近い。

専門分野の紹介

- アルゴリズム：　明示的な作業手順
  - 仕様書やレシピ
  - マニュアル
  - 数学（方程式の解法など）
  - コンピュータアルゴリズム
- 現代社会はアルゴリズムで動いている
- コンピュータアルゴリズムの設計と解析
  - 数学が必須の手段
  - ソフトウエアの性能と安全性を保証する

アルゴリズムの設計と解析とは？

- 1から100までの数を足しなさい
  - 平凡なアルゴリズム：99回の足し算
- 良いアルゴリズムの設計：　100（100＋1）/2
- アルゴリズムの解析（正当性の証明）



ガウス（最強のアルゴリストの一人）

もちろん帰納法でもよいが、
エレガンスは大切

ディジタル星型領域とディスクレパンシー：富士山を認識するための数学

Takeshi Tokuyama

Joint work with Jinhee Chun, Matias Korman, Martin Noellenberg

Picture of a pyramid

from web page of Institute of Egyptology,
Waseda University, Japan

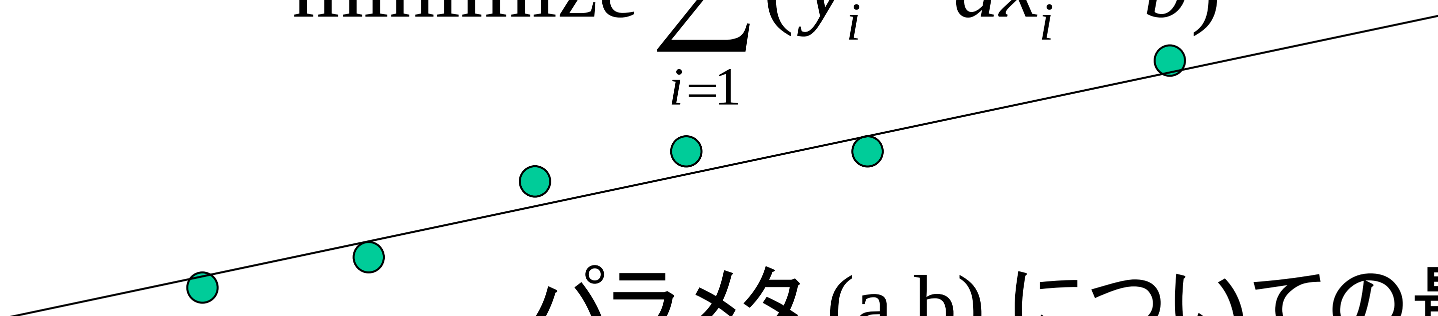
物体の認識

データ(点集合,関数)を幾何学物体として認識する。

$P = \{p_1, p_2, .., p_n\} \quad p_i = (x_i, y_i)$

直線認識： ガウスの最小二乗法

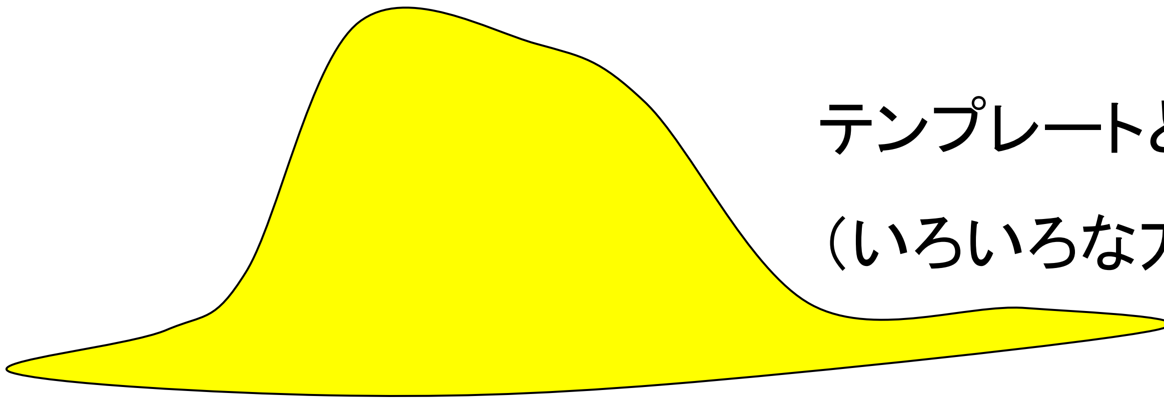
$$\text{minimize} \sum_{i=1}^{n} (y_i - a x_i - b)^2$$



パラメタ (a,b) についての最適化

注意： 水平線(a=0)に限定すると、bはy値の平均値になり、最小誤差は分散になる

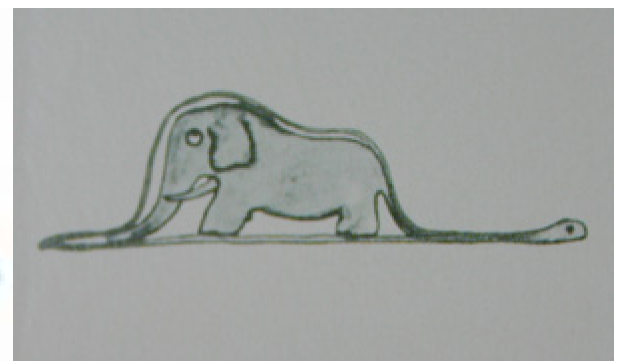
物体の認識:テンプレート認識



テンプレートとのパターンマッチング

（いろいろな方法がある）

最小二乗法なら:　持っているテンプレートと(回転、変形して）比較　(定数個のパラメタ）

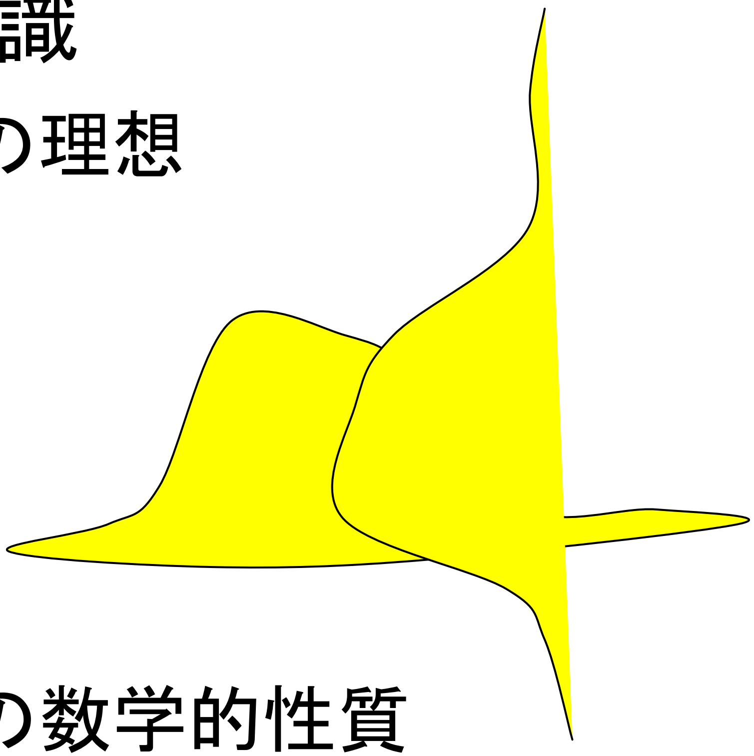


「星の王子様」サンデクチュベリ　より

物体の認識:概念認識

概念による認識:　昔の人口知能の理想

顔の真ん中にあるフルヘッヘンド
しているもの？　(解体新書)



一般的な「山になる」という概念の数学的性質

- 頂上がある(単峰2変数関数)
- 「等高線」が良い形をしている

概念とのパターンマッチ:
漠然とていてかえって難解

単峰関数への最小二乗誤差近似(1変数）

入力:　区間[0,1] 上で定義された関数 f

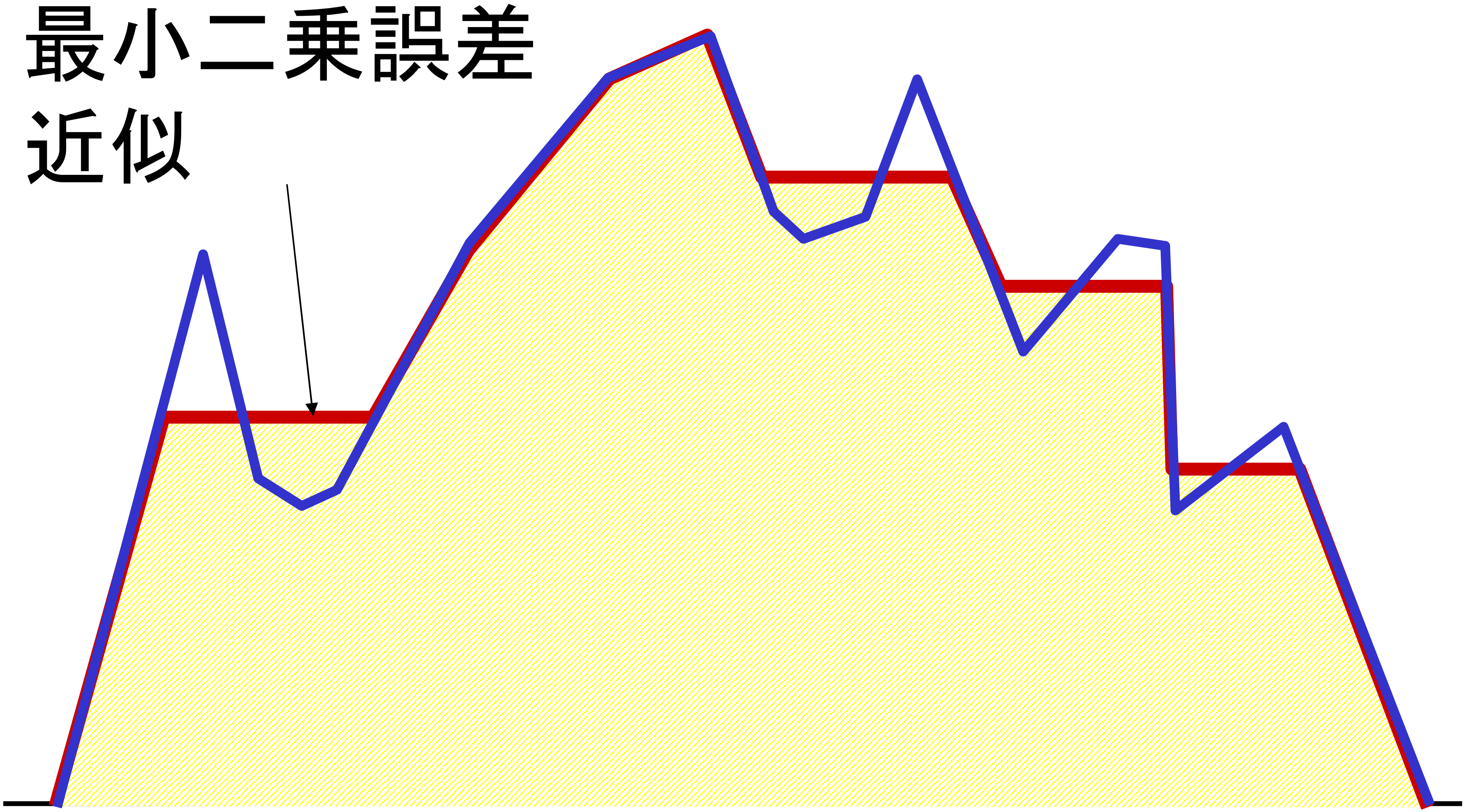
出力:　単峰関数　φ_f

目的: Minimize the L_2 distance

D(f, φ_f) between f and φ_f

$$D(f,\varphi_f) = \int_0^1 (f(x) - \varphi_f(x))^2 dx$$

定数個パラメタの最小二乗近似より難問


最小二乗誤差
近似

単峰近似を計算するアイデア

- 頂点の位置が判ったとする
- 頂点までは単調増加、そのあとは単調減少
- 単調増加関数での最小二乗誤差近似を計算すれば良い
- 単調増加関数の積分関数は凸関数
- 凸包アルゴリズムを使おう

アルゴリズム

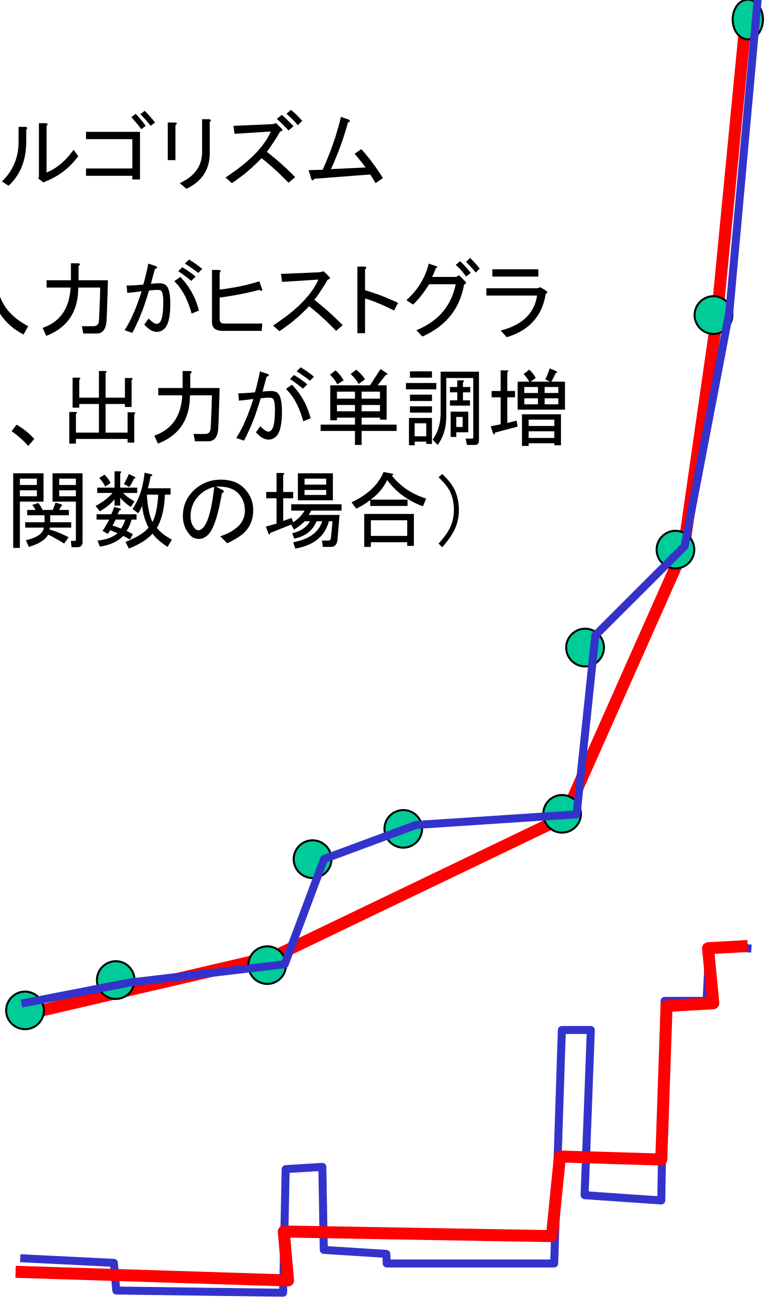
(入力がヒストグラム、出力が単調増加関数の場合)

1．入力関数の積分曲線を計算

$$y = F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

2．積分曲線Fの凸包を計算する

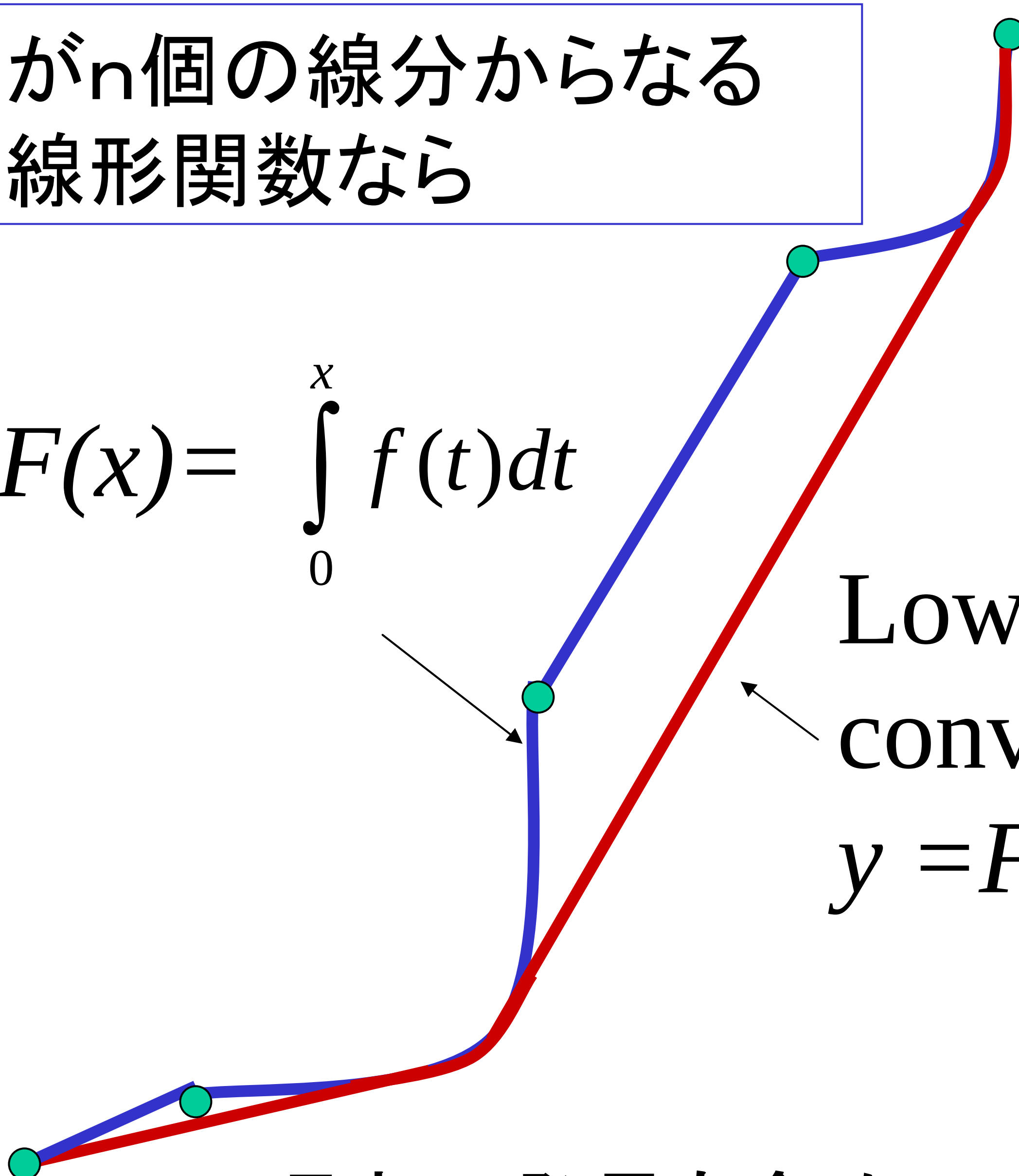
3．凸包関数の微分曲線を出力



Input curve $y = f(x)$

入力がn個の線分からなる
区分線形関数なら

$$y=F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$



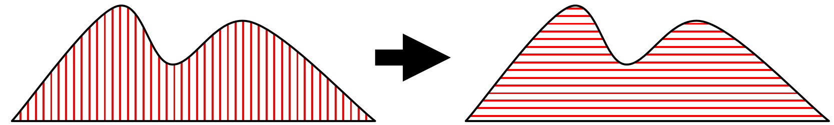
Lower convex hull of $y=F(x)$

頂点の発見も含め、O(n)時間で計算
(Chun, Sadakane, Tokuyama 2003)

なぜアルゴリズムが正しいか？

- 正当性の証明
- 計算時間の解析
- (理論分野の評価で)面白いアルゴリズムとは
  - アルゴリズム自体は素朴で簡単
  - 正当性の証明と計算時間の解析が完備
    - エレガンスあるいは数学的な深さがある

Riemann vs Lebesgue



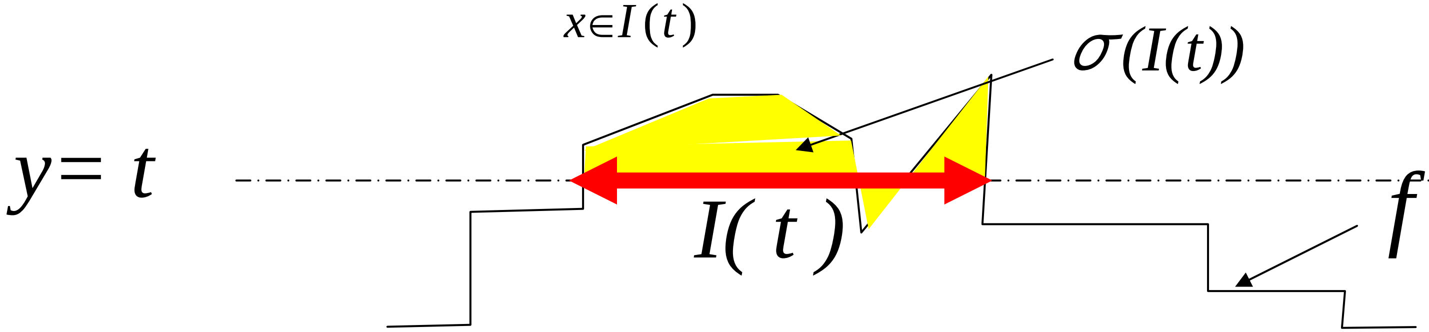
Minimize $V(\varphi) = \int_0^1 (f(x) - \varphi(x))^2 dx$

Lemma. 下記の関数の最大化と同値である

$$2\int_{t=0}^{\infty} \sigma(I(t))dt$$

t: height

$$\sigma(I(t)) = \int_{x \in I(t)} (f(x) - t)dx$$



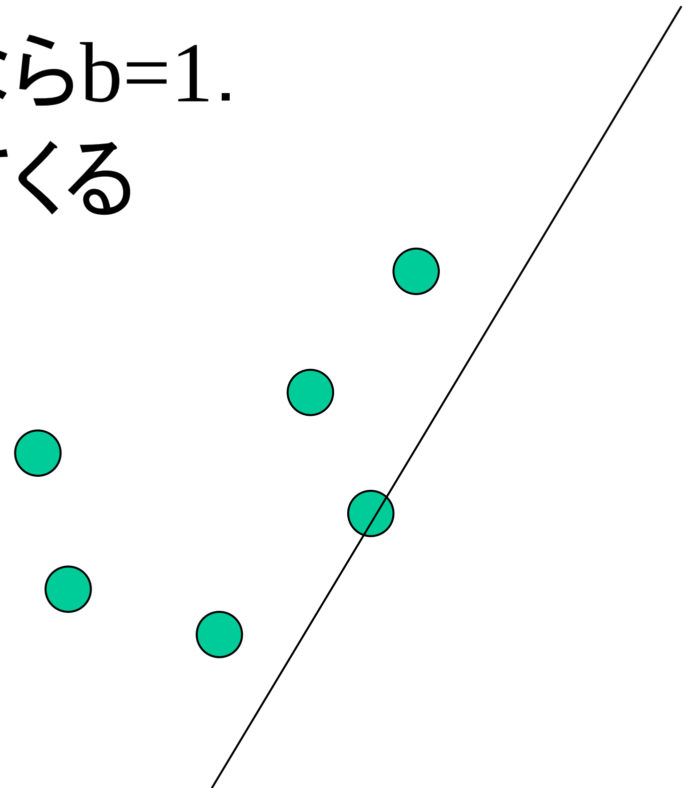
上記積分値を最大化する$I(t)$を計算すればよい

各々のtで独立に考えよう:　$I(t) = [a, b]$ならば

$$\sigma(I(t)) = \int_{x \in I(t)} (f(x) - t)dx = (F(b) - F(a)) - (b - a)t$$

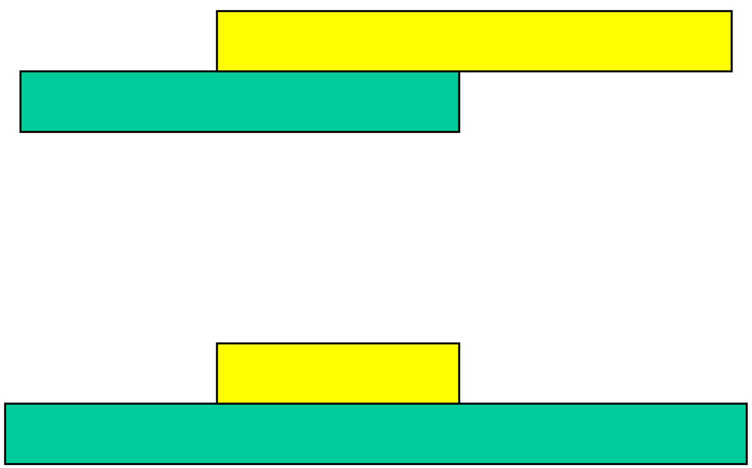
これが最大になるa, bを探す

もし出力が単調増加ならb=1.
すると凸包条件が出てくる



不安な点(多変数の場合は深刻）

- 各々でI(t)を求めて、積み重ねると、きちんと単峰関数になるか？



2区間の共通部分は区間、

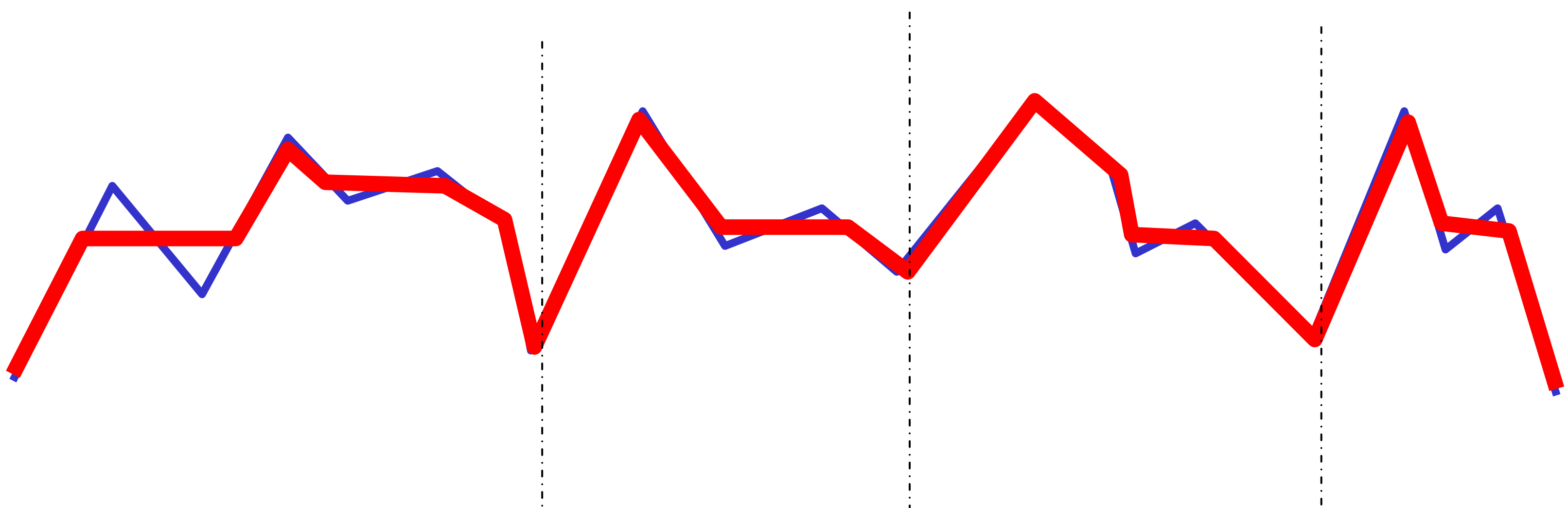
一点を共有する2区間の和集合も区間

多峰関数近似

入力: [0,1] 区間上の関数 f, 許容誤差 ε.

出力: f を近似する k 峰関数 ψ で、各単峰部分での二乗誤差が許容誤差以下

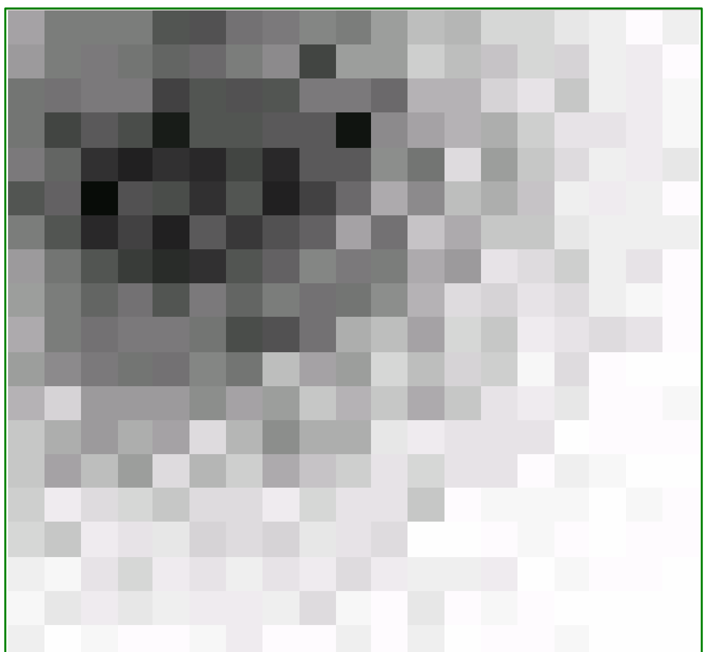
目的: Minimize k



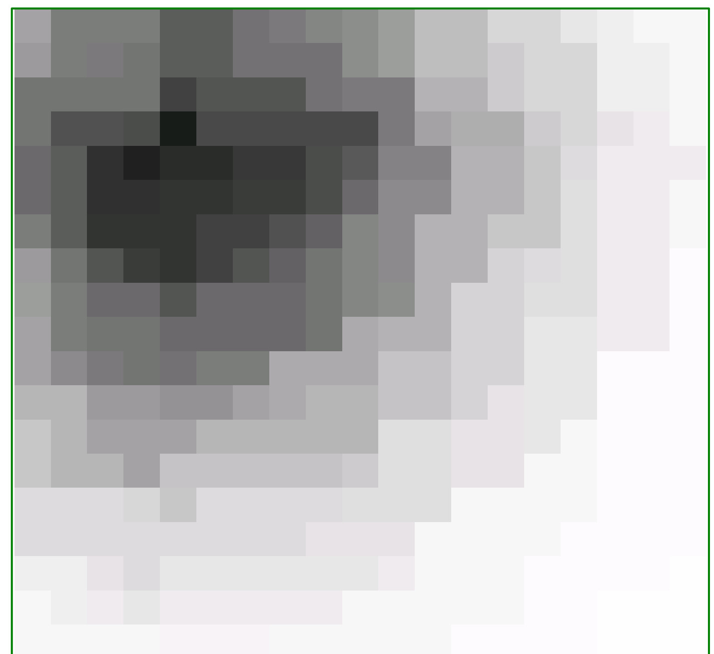
二変数関数だと、どうなるか？

- 入力：　二変数関数（地形図のようなもの）
- 出力：　単峰関数(山）

一般の入力関数では困難：　ピクセルグリッド上の関数(区分定数関数）に限定する



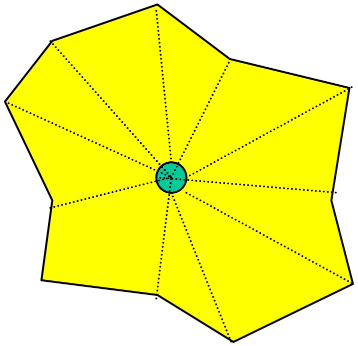
入力関数(高さを濃度で表示）



出力関数

出力（山である）条件

- 山の条件
  - 単峰関数である
  - 水平断面が良い形である
    - 良い形とは？
    - 『山頂』を中心に持つ星型領域が一番の候補
      - 川が削った谷の部分がくぼんで、星型になる



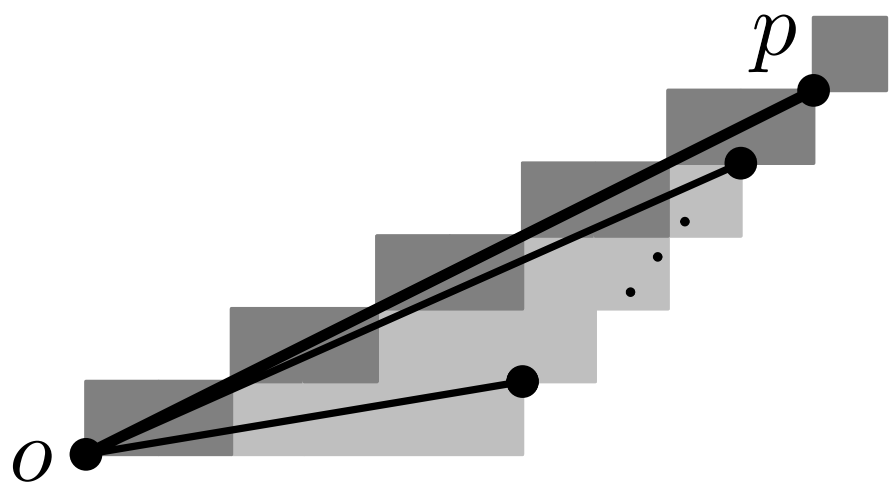
離散ピクセル平面での星型集合

- 「（ディジタル）星型集合」とは何か？
- 星型集合Rの性質
  - 中心点 O から, Rの各点Pに引いた「ディジタル線分」OP がRに含まれる
  - ユークリッド平面の星型集合の近似になる
- ディジタル星型領域を用いると、入力地形に対して、最小二乗誤差を持つ『山』が計算できる

ピクセル(グリッド) 平面での線分

- よくある定義:線分OPと左辺が交わるピクセルの集合
- グリッド点での表示だと、y = [ax + b]　x=1,2,..,n
  - n は列の数

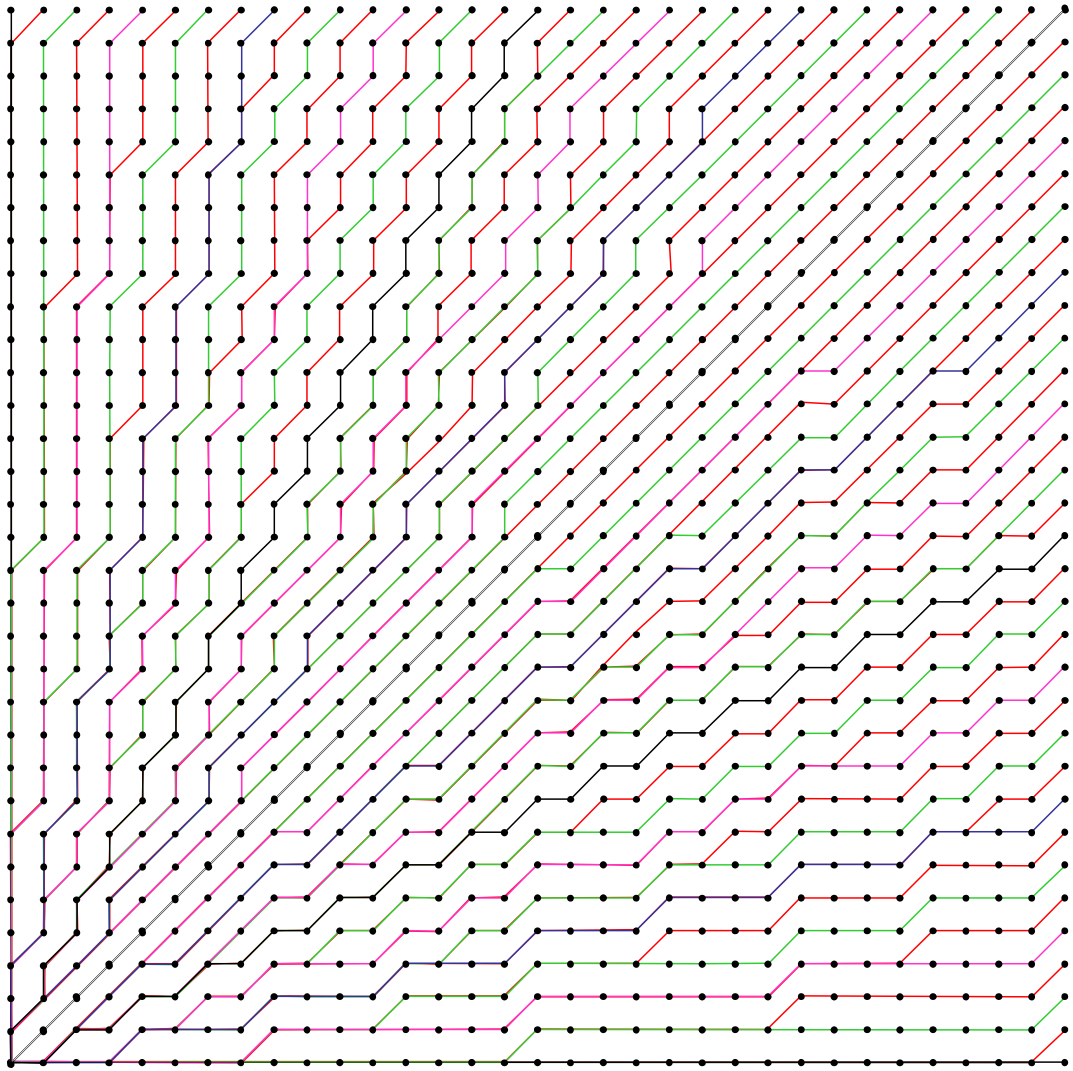
右図のように、線分OPに対応する星型領域は「太って」しまう



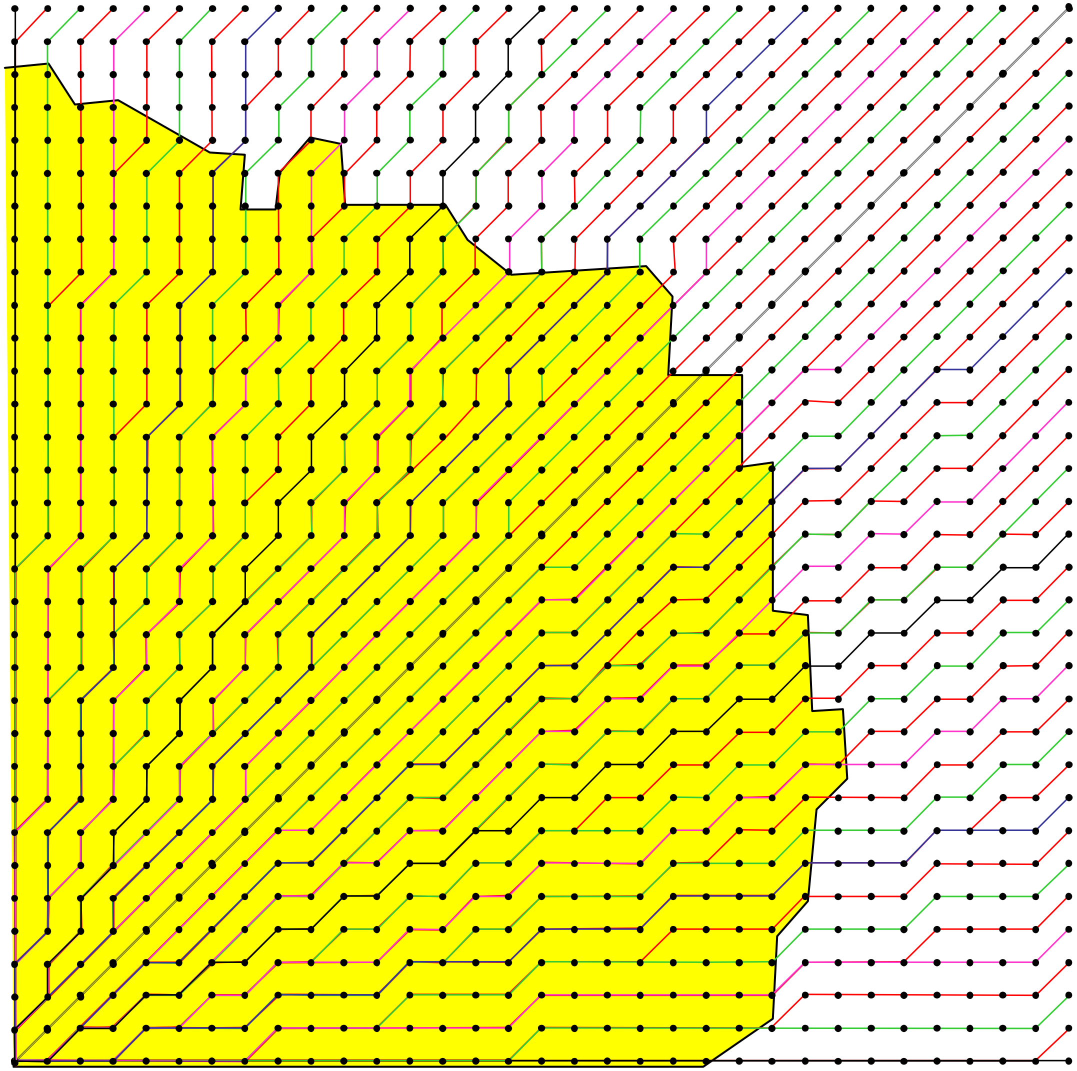
代わりのアイデア

- 中心点を根に持つ木Tをグリッド上に作る
  - 山頂からの「水の流れ」のようなもの
- Tの根付き部分木(枝をいくつか切り払ったもの）に対応する領域を星型領域と呼ぼう
- グリッド線分OP:　Pに対応するグリッド点から中心点Oまでの木のパス
- 要求:　本当の線分OPと木のパスOPが非常に近い必要がある。
  - どこまで近くで来るだろうか?

構成する木(第一象限部分）



星型領域（第一象限部分）



定理：任意の直線分OPと木TのOP間パスの距離は

(log n)/2 以下

高等な数学の出番：

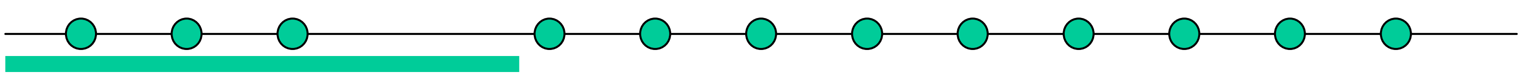
もっと良い木ができるか？

ディスクレパンシーの理論

- [0,1] 区間に数 $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$を発生
- 常に一様分布に近くなるように、一つづつ数を追加する
- 一様性の偏り(Discrepancy)
  - [0,b] に入る点の数がbn とどのくらい違うか？

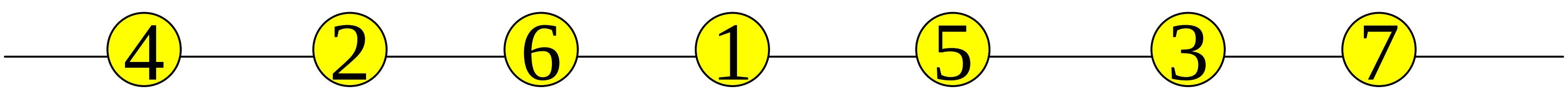
$$\max_{0<b<1} ||\{i \le n \mid a_i < b\}| - bn|$$

- ランダムな発生だと、Discrepancyは$n^{1/2}$



Low discrepancy sequence

- Van der Corput 数列 : Discrepancy がO(log n)
- インデックス を二進展開し、小数点で反転
  - 1, 10,11,100,101,110,111
  - 0.1, 0.01, 0.11, 0.001, 0.101, 0.011,0.111



- Van der Corput の予想(1935) : Discrepancyが1になる数列は存在しない

Van der Corput 予想の解決

- Van Aardenne-Ehrenfest (1945)
  - Discrepancy を定数にすることの不可能性
  - かなり有名な女性数学者
- K. F. Roth (1954）:　$\Omega((\log n)^{1/2})$
  - フィールズ賞（1958）
- P. Erdos (1964) :　すこし強い形の予想
- W. M. Schmidt (1972): $\Omega(\log n)$

星型領域を作る木との対応

定理: グリッドの全域部分木（葉が内部にないもの）に対し、数列が対応し、木における線分とパスの距離が数列のDiscerpancyに定数比で対応する。

- 距離の差がo(log n) になると、Schmidt の結果と矛盾する
  - 数学の40年間の研究を無償で使える
  - 我々の木: Van der Corput 列に対応

二変数の最適単峰近似

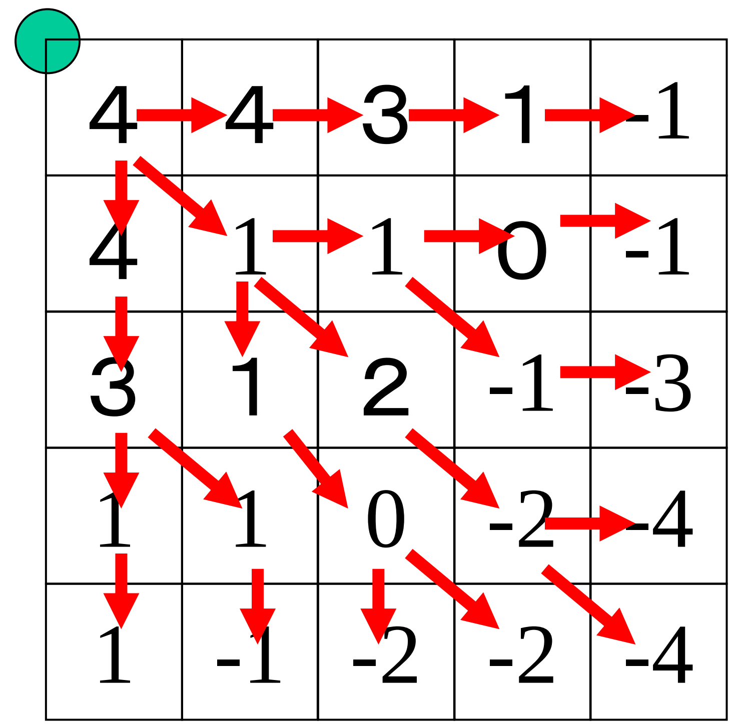
- 入力関数:　$f(x,y)$: N ×N ピクセルグリッド上の関数
- 出力関数: fとの二乗積分誤差を最小にする単峰関数
  - 山の中心＝p
  - 出力関数の高さtでの切断面 = R(t)
    - pを中心に持つ星型領域

R(t)は、 $f(x,y) - t$ の(領域内での）和を最大にする星型領域になる

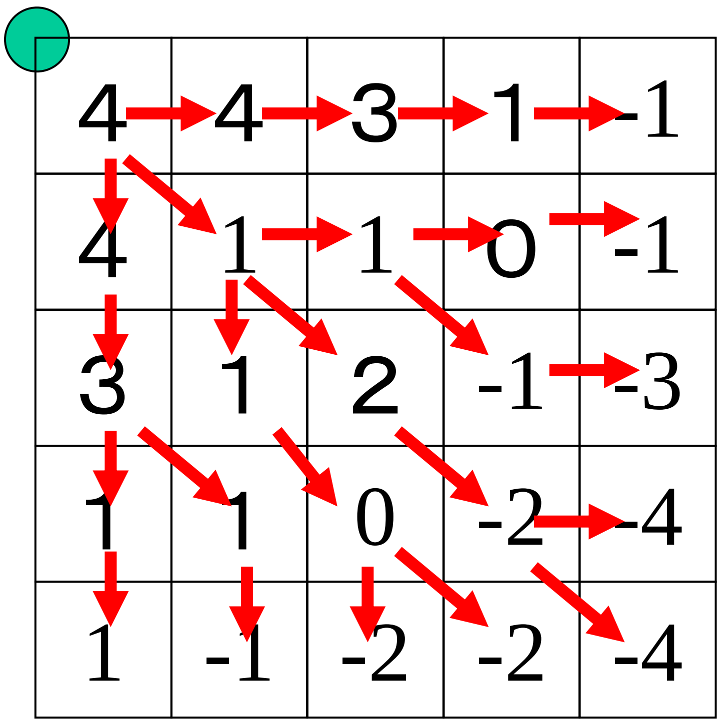
高さt＝4を引いたものと、
木構造

入力関数　f

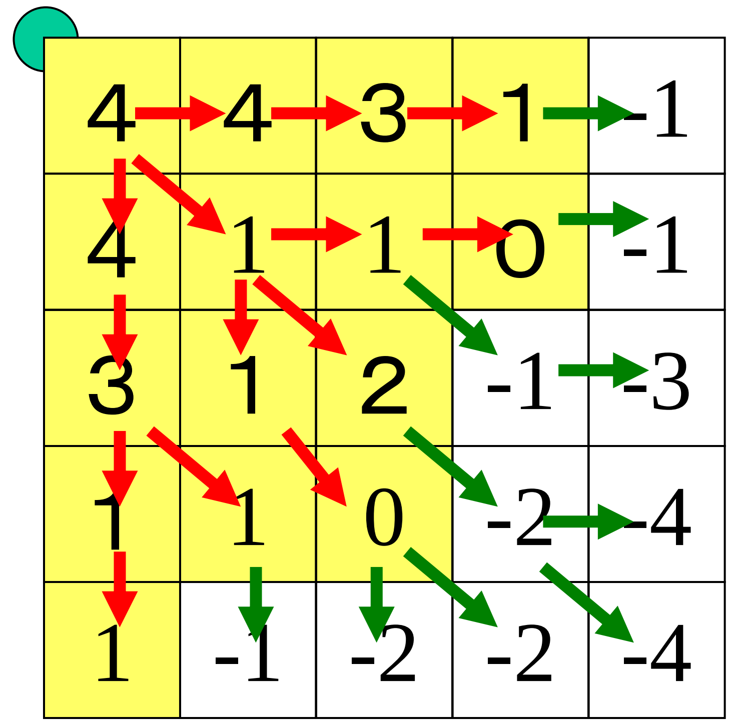
8	8	7	5	3
8	5	5	4	3
7	5	6	5	1
5	5	4	2	0
5	3	1	1	0



木構造

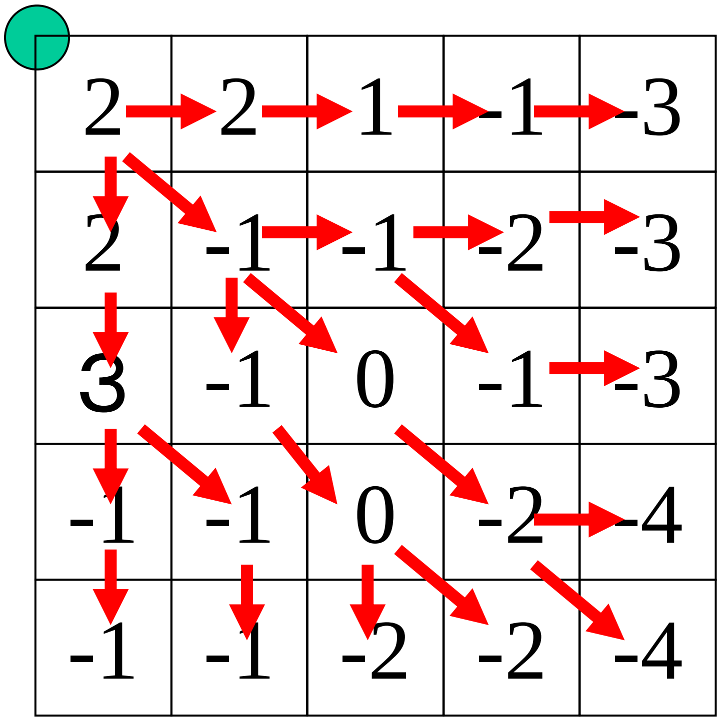


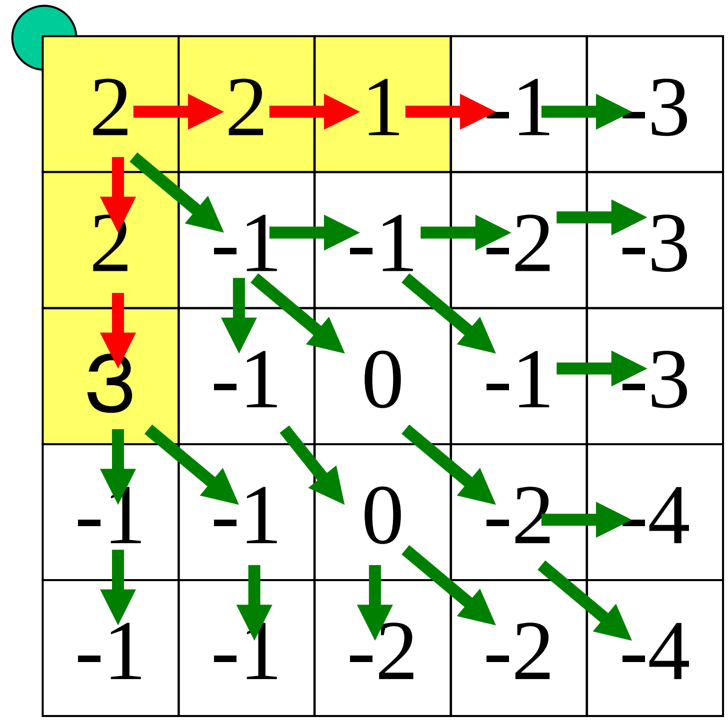
最大重み部分木と星型領域



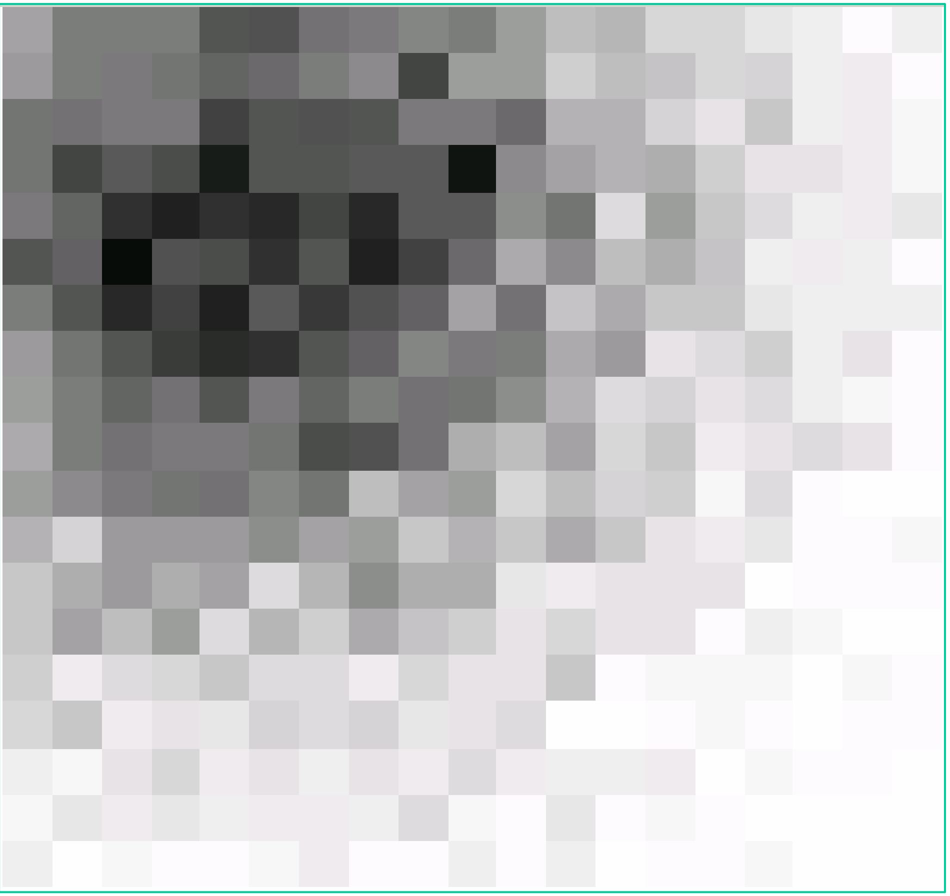
高さが2増えると

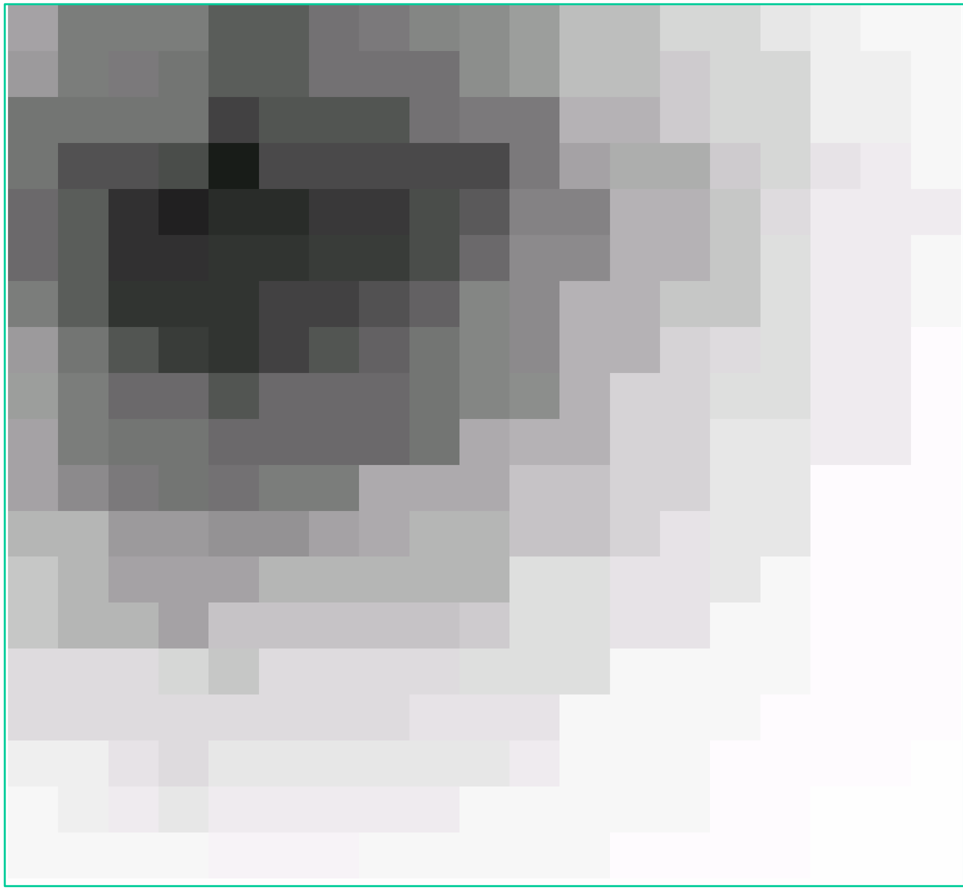
最大重み部分木
と星型領域





重ねていくと、きちんと最小二乗近似を達成する山になる（とても不思議だが、数学的にきちんと証明されているので、安心）





まとめ

- 世の中はアルゴリズムで動いている
- アルゴリズム設計の問題（例：山の概念の認識）
  - 数学が使えないと計算する定式化ができない
  - 数学の知識がないと、解法のイメージすらわかない
  - 数学的な道具の開発がアルゴリズム設計の鍵
  - 数学で何十年もかけた問題解決が品質保証に役に立つ
- 『美しい数学』ほど役に立つように思える
- 現代、未来の数学も『美しい数学』であってほしい
  - モーツアルトやベートーベンは美しい
- 「映画音楽を造る」ような数学をやりたい
  - 美しい数学を使い、必要な数学は作る
  - バッハもシェーンベルクも武満徹も、場面によって使い分ける