# 球面上の最適配置入門

宗政昭弘

2007 年 9 月 4 日

２点間の距離が一定である。重心が原点にあるという意味できれいな配置。

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

## 正多面体

- これを何に使う？
- これ以上何を研究する？
- きれいなものは役に立つ（はず）という哲学。
- きれいさを定式化する必要がある。

$$\frac{1}{4\pi}\int_S f(\xi)d\mu(\xi) \approx \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x)$$

左辺の $S$ は原点を中心とする単位球面
右辺の $X$ はその有限部分集合

地球上の温度の平均（実際は積分して計算するのではなくたくさんの点で観測するのだろうが）と
サンプルの点の集合 $X$ での平均

| 正 $n$ 面体 | 4 | 6 | 8 | 12 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| 頂点数 | 4 | 8 | 6 | 20 | 12 |
| $t$ | 2 | 3 | 3 | 5 | 5 |

上の表は、正 $n$ 面体の頂点数と、近似の良さ（$t$）を表している。近似の良さを表す値 $t$ は

$$\frac{1}{4\pi}\int_S f(\xi)d\mu(\xi) = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x)$$

が $t$ 次以下の任意の多項式関数について成り立つことを意味する。

$$\frac{1}{4\pi}\int_S f(\xi)d\mu(\xi) = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x) \quad (\deg f \leq t).$$

上の等式が目的ならば、正多面体以外にもっとよい配置があるのでは？
より大きい次数の多項式関数について等式が成り立つ配置では必然的に点の数は多くなりそう。

これを研究したのが Johan Jacob Seidel (1919–2001)

オランダの Eindhoven 工科大学の数学科の創始者。

$$\frac{1}{4\pi}\int_S f(\xi)d\mu(\xi) = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x)$$

が $t$ 次以下の任意の多項式関数について成り立つとき、$X$ を spherical $t$-design と呼ぶ。

Delsarte-Goethals-Seidel (1978)
一般に $t$ 次までで等式を満たすには少なくとも

$$(\lfloor t/2 \rfloor + 1)^2$$

点必要（数学では具体的な応用より、このような理論的な結果が評価される）

## 例　サッカーボール（60 頂点）

すべての辺の長さは同じ。これは spherical 5-design.
だが、変形して 9-design にできる。
J.M. Goethals and J.J. Seidel, “The Football,” Nieuw Arch. Wisk. 29 (1981), p.52.

Spherical design の研究とは $t$ を決めたときなるべく点の数が少ない spherical $t$-design の例を構成すること。

しかも３次元空間における球面だけではなく高次元の場合も。

数学者のできること：要求を満たす具体例の提示。要求を満たさない場合は No とはっきり言える。

数学者ができるとは限らないこと：具体例の使い方と実装（アルゴリズムは計算機科学者の役割）

数学者の得意とすること：関連した問題（例えば球の詰め込み問題）にもフレキシブルに対応できる

# 数学者の研究 (II)

球面上の配置とは、球面という無限個の点の集合から良い有限部分集合を選ぶ方法を示すこと。

球面でなくても適当な全体集合に対しては全く同様の理論がある。

| ある全体集合 | 良い配置 |
|---|---|
| $n$ 個から $r$ 個選ぶ組合せ全体 | 実験計画法 |
| ビット列 | 符号理論 |

良い配置をデザインと呼び、それを研究する分野をデザイン理論という。

- A. Munemasa, “Spherical Designs”, chapter 54 of Handbook of Combinatorial Designs, 2nd ed., edited by C.J. Colbourn and J.H. Dinitz, Chapman & Hall/CRC, 2006.
- 岩波数学辞典第４版「デザイン理論」, 2007
- 坂内英一・坂内悦子「球面上の代数的組合せ理論」, シュプリンガー・フェアラーク東京