

Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles

à l'ENSAE, septembre-octobre 2009

1. INTRODUCTION

1. Motivations

Les EDP : des modèles qui généralement servent à décrire un phénomène (de la physique, chimie, biologie, économie, finance, etc.) par l'évolution d'une ou plusieurs quantités au cours du temps et dans l'espace. Ces modèles contiennent des dérivées par rapport aux variables (de temps et d'espace généralement).

Avantage d'avoir de tels modèles : pouvoir simuler le phénomène numériquement.

Ex 1.: prévisions météo obtenues par simulation numérique de systèmes d'équations de la mécanique des fluides, prenant en compte des phénomènes de turbulence atmosphérique, rayonnement terrestre.

Ex 2.: une compréhension plus profonde de Tsunami peut être réalisé par des modélisations et des simulations numériques. Grâce à ça, on peut éviter la perte de vies au moment d'une catastrophe naturelle dans l'avenir. Une approximation des ondes océaniques durant un Tsunami est démontrée en utilisant un système d'EDPs.

Importance des études mathématiques : Pour mettre au point des simulations numériques qui permettent de représenter de manière fiable et efficace les solutions des modèles, il est important de comprendre la démarche qui a permis d'aboutir au modèle mais également les propriétés mathématiques de ces modèles.

Les preuves théoriques peuvent justifier les résultats obtenus dans des expériences, confirmant la validité du modèle mathématique, ou prévoir un nouveau phénomène qui n'était pas encore observé. D'autre part, des observations numériques sont utiles pour donner une intuition pour une justification théorique.

(pour des simulations pratiques, voir par ex., <http://www.pdesolutions.com/>)

But du cours :

- Donner quelques exemple simples, classiques d'EDP **linéaires**.
- Introduire une idée des méthodes pour les résoudre, ainsi que quelques propriétés importantes de ce modèles.

Remarque: Ici, **linéaire** signifie que la solution du modèle dépend linéairement des données (donnée initiale, force extérieure, etc) Même pour ces modèles linéaires simples cependant une méthode générale de résolution demanderait des outils plus complexes.

La dimension d'ensemble des solutions d'une EDP est très grande (dimension finie dans le cas d'EDO)

Les propriétés des solutions dépendent des équations, des espaces des fonctions et des domaines où leurs équations sont définies.

2. Un exemple de modélisation

2-1. l'équation de la chaleur L'équation de la chaleur modélise la distribution de la température dans le domaine à l'instant t . On considère $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ω est supposé occupé par un matériau homogène, isotrope, conducteur.

$x \in \Omega$: variables d'espace,

t : variable de temps,

$f(t, x)$: sources de chaleur (données)

$\theta(t, x)$: température (inconnue **À chercher**)

Si V est volume élémentaire $\subset \Omega$, alors la variation en temps de la quantité de chaleur $c\theta$ (c = constante = chaleur spécifique, dépend du matériau) est égale au bilan de ce qui est produit par les sources, et de ce qui rentre ou sort par les parois ∂V :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V c\theta(t, x) dx \right) = \int_V f(t, x) dx - \int_{\partial V} q \cdot \vec{n} dS,$$

où dS est l'élément de surface infinitésimal, \vec{n} est la normale unitaire orienté vers extérieur de Ω et q est le vecteur flux de chaleur. Le théorème de Gauss implique

$$c\partial_t\theta(t, x) + \operatorname{div}q(t, x) = f(t, x).$$

Loi de Fourier: Dans beaucoup de situations, le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température, mais pointe dans la direction opposante.

$$q = -k\nabla\theta$$

où k est constante positive (conductivité thermique). On obtient donc l'équation

$$c\partial_t\theta(t, x) + \operatorname{div}(-k\nabla\theta) = c\partial_t\theta(t, x) - k\Delta\theta(t, x) = f(t, x), \quad x \in \Omega$$

Il faut qu'on rajoute une condition initiale : $\theta(0, x) = \theta_0(x)$

et des conditions limites: (il y a plusieurs possibilités)

- Condition aux limites de Dirichlet : $\theta(t, x) = 0, \forall x \in \partial\Omega, \forall t > 0$ (le matériau baigne dans un thermostat a température constante(nulle)). On maintient le bord $\partial\Omega$ à une température constante(nulle).
- Condition aux limites de Neumann : $\vec{n} \cdot \nabla\theta = 0, \forall x \in \partial\Omega, \forall t > 0$ (le matériau est thermiquement isolé de l'extérieur. Aucun flux de chaleur ne traverse la frontière $\partial\Omega$)
- Condition aux limites de Robin : $\vec{n} \cdot \nabla\theta + \alpha\theta = 0, \forall x \in \partial\Omega, \forall t > 0$ (situation intermédiaire. Flux de chaleur sortant proportionnel au saut de température entre extérieur et intérieur)

Exemple pour les conditions aux limites de Dirichlet (appelé "problème aux limites" ou "problème de Cauchy") :

$$\begin{cases} c\frac{\partial\theta}{\partial t} - k\Delta\theta = f, & \text{pour } x \in \Omega, t > 0 \\ \theta(t, x) = 0, & \text{pour } x \in \partial\Omega, t > 0 \\ \theta(0, x) = \theta_0(x), & \text{pour } x \in \Omega. \end{cases}$$

Remarque: l'équation de Black-Scholes est une sorte d'équation de la chaleur.

2-1. Problème bien posé (au sens de Hadamard)

Un problème (de Cauchy ou aux limites ou les deux) est dit “bien posé” si pour toute donnée (condition initiale et limite, 2ème membre, etc) le problème admet une unique solution et cette solution dépend continument des données.

2-2. Exemple de problème mal posé (Instabilité de Hadamard)

On verra que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \partial_x^2 u = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0, x) = 0 \\ \partial_t u(0, x) = f(x). \end{cases}$$

est mal posé au sens que la solution n’est pas continue par rapport à la donnée f .

3. Terminologie (parabolique, elliptique, hyperbolique)

Considérons un opérateur différentiel à second ordre, et une équation

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu, \quad Lu = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (L)$$

où $a_{ij} = a_{ji}$, b_i et c sont des constantes. Soit μ_1, \dots, μ_n les valeurs propres de la matrice hermitienne $A = (a_{ij})$. La diagonalisation entraîne, utilisant une matrice unitaire associée T ,

$${}^t T A T = \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$

Avec le changement de coordonnées $X = {}^t T x$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, on obtient

$$Lu = \mu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + \cdots + \mu_n \frac{\partial^2 u}{\partial X_n^2} + (\text{fonction de } \frac{\partial u}{\partial X_j}, u, \text{ et constantes}).$$

- Si $\mu_j > 0$ ou $\mu_j < 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$, on dit que l’opérateur L et l’équation (L) sont elliptiques.
- S’il existe un seul k tel que $\mu_k < 0$ et $\mu_j > 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$, $j \neq k$, L et (L) sont dits hyperboliques.
- S’il existe un seul k tel que $\mu_k = 0$ et $\mu_j > 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$, $j \neq k$, et le coefficient de $\partial u / \partial X_k$ est négatif, L et (L) sont dits paraboliques.

Exercice 1. Vérifier que

l’équation de la chaleur $\partial_t u - \Delta u = 0$ est parabolique,

l’équation de Laplace $\Delta u = 0$ est elliptique, et

l’équation des ondes $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ est hyperbolique.

2. QUELQUES EXEMPLES D'EDP (LINÉAIRES) CLASSIQUES

2.1. L'équation de la chaleur (une équation parabolique). Considérons d'abord le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$. Dans ce cas, l'équation a une solution qui s'exprime à l'aide d'"un noyau". Soit l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (1)$$

a. La solution fondamentale

Pour chercher ce "noyau", supposons tout d'abord $n = 1$ et supposons que l'on puisse trouver une unique solution qui vérifie (au sens faible (cf. le cours distribution)) le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t G = \Delta G, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ G(0, \cdot) = \delta_0 \end{cases} \quad (2)$$

où δ_0 est la distribution définie par $\langle \delta_0, \phi \rangle = \phi(0)$, pour $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ (i.e., C^∞ sur \mathbb{R} à support compact) (cf. cours distribution). Alors, si $u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, et si $t \mapsto G(t, \cdot)$ est régulière, la convolution

$$u(t, x) = u_0 * G(t, \cdot) = \int_{\mathbb{R}} G(t, x - y) u_0(y) dy$$

vérifie les équations dans (1), donc u est au moins formellement solution de (1). Cherchons G en utilisant la transformation de Fourier en x :

$$\hat{G}(t, \xi) = \mathcal{F}_x(G(t, \cdot))(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} G(t, x) dx.$$

Alors \hat{G} doit être une solution de l'EDO suivante:

$$\begin{cases} \partial_t \hat{G} + |\xi|^2 \hat{G} = 0, & t > 0, \\ \hat{G}(0, \xi) = 1. \end{cases}$$

On peut résoudre cette EDO, de plus, par la transformée de Fourier inverse, on obtient la fonction

$$G(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \quad (3)$$

Cette fonction gaussienne est appelée noyau de l'équation de la chaleur.

Exercice 2. Montrer (3).

La même démarche fonctionne en fait également en dimension n quelconque. On en déduit donc que la solution de (1) est donnée par

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x - y) u_0(y) dy = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4t}\right) u_0(y) dy \quad (4)$$

Exercice 3. On suppose $u_0 \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (continue, bornée sur \mathbb{R}^n), et on définit u par l'expression (4). Montrer que u est bien une solution de l'équation de (1) pour $t > 0$.

Remarques.

- $U(x, y, t) = G(t, x - y)$, $x, y \in \mathbb{R}^n, t > 0$ dans l'expression de (4) est appelée "solution fondamentale" de l'équation de la chaleur.
- Le noyau $G(t, x)$ a la propriété suivante :

$$\forall \lambda > 0, \quad \lambda^n G(\lambda^2 t, \lambda x) = G(t, x), \quad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

La forme de G change si le temps change, mais on voit que l'on déduit toujours la même forme tout le temps grâce à cette invariance de changement d'échelle. Une solution d'un problème de Cauchy qui a une telle invariance est appelée "solution auto similaire."

- Pour le cas où, dans le milieu, on perd une quantité de chaleur à cause d'une radiation ou d'une absorption, ou une nouvelle quantité de chaleur se produit, l'équation $\partial_t u - \Delta u = g(t, x)$ est utilisée comme modèle. On verra que le principe de Duhamel donne la formule

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, t - s) g(s, y) dy ds$$

qui est bien solution.

b. Les propriétés importantes de la solution de (1)

- **Régularité:** Soit u_0 une fonction bornée sur \mathbb{R}^n . Dès que $t > 0$, la solution u est C^∞ par rapport aux $x \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$.
- **Irreversibilité:** Si on change t en $-t$, l'intégrale (4) ne converge pas pour $t < 0$. On peut en fait montrer que le problème (1) devient mal posé. On dit que l'équation de la chaleur est irréversible en temps.
- **Principe du maximum:** l'expression (4) implique que si $u_0 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, alors $u(t, x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et tout $t > 0$.
- **Propagation de l'information à vitesse infinie:** Si $u_0(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, u_0 est à support compact et $u_0 \neq 0$ alors on a $u(t, x) > 0$ pour tout $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$.

c. Le cas d'un ouvert borné Ω avec condition Dirichlet

Ici, on considère $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine avec le bord $\partial\Omega$ "suffisamment régulier." Considérons l'équation de la chaleur dans Ω avec condition de Dirichlet :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & \forall x \in \Omega, \forall t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & \forall x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0, & \forall x \in \partial\Omega, \forall t > 0 \end{cases} \quad (5)$$

Tout d'abord, observons le cas $n = 1$, et $\Omega =]0, 1[$. On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0, & x \in]0, 1[, \quad t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in]0, 1[\\ u(t, 1) = u(t, 0) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

Rappel: La méthode de Fourier (Séparation des variables). Supposant que la solution $u(t, x)$ soit écrite sous la forme $u(t, x) = X(x)T(t)$, on réduit l'équation (6) au problème aux valeurs propres: $\exists \lambda$ telle que $X''(x) = \lambda X(x)$ et $T'(t) = \lambda T(t)$.

- On cherche une solution du problème aux valeurs propres. $\lambda_k = -(k\pi)^2$, $X_k(x) = \sin(k\pi x)$, et $T_k(t) = c_k e^{-(k\pi)^2 t}$, $k = 1, 2, \dots$
- $u_k(t, x) = c_k \sin(k\pi x) \exp(-(k\pi)^2 t)$ est un candidat pour une solution.
- On détermine c_k pour qu'on puisse avoir $u_k(0, x) = u_0(x)$, mais en général ce n'est pas possible en dehors du cas où $u_0(x)$ est une fonction de sinus. Donc supposons, pour l'instant, que $u_0(x)$ peut être écrite

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x) \quad (7)$$

et prenons $a_k = c_k$.

- Formellement la fonction

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\pi x) \exp(-(k\pi)^2 t) \quad (8)$$

est une solution du problème (6) grâce au principe de superposition.

Donc, en général, pour chercher une solution dans un ouvert borné, il suffit de résoudre le problème aux valeurs propres :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (9)$$

Mais il y a des questions à répondre.

1. On avait supposé $u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x)$ dans (7), mais quelle sorte de fonction u_0 peut vérifier cette hypothèse ?
2. Quel sens de convergence de ces séries (8) ?

Les espaces de Sobolev sont utiles pour résoudre ces questions.

Définition. Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$. On dit que u a une dérivée partielle faible dans L^2 , si il existe $v \in L^2(\Omega)$, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v(x) \phi(x) dx;$$

On note $v = \frac{\partial u}{\partial x_i}$. Si, pour tout i ($1 \leq i \leq n$), u a des dérivées faibles $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, alors $u \in H^1(\Omega)$.

Proposition. $H^1(\Omega)$ est un espace d'Hilbert muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Définition.

$H_0^1(\Omega)$ est la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Définition.

$u \in H^2(\Omega)$ ssi $u \in H^1(\Omega)$ et $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$, $\forall i = 1, \dots, n$.

Remarque. En dimension $n > 1$, les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne sont pas nécessairement continues, cependant on peut donner un sens faible à u sur $\partial\Omega$ si $u \in H^1(\Omega)$ et, alors, on a $u = 0$ (au sens faible) sur $\partial\Omega$ si $u \in H_0^1(\Omega)$.

Théorème (admis). Le problème aux valeurs propres (9) a des valeurs propres $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}^*}$ telles que $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, $\lambda_j \rightarrow \infty$ lorsque $j \rightarrow \infty$, et que les fonctions propres associées orthonormalisées $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}^*}$ appartiennent à $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. De plus, $\{e_1, e_2, \dots\}$ forme une base orthonormale complète dans $L^2(\Omega)$.

Ce théorème peut répondre à la question 1);

Théorème. Une fonction $f \in L^2(0, 1)$ quelconque peut être uniquement écrite avec la série

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2(f, \sin(k\pi x)) \sin(k\pi x),$$

où $(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$. Cette série converge au sens de $L^2(0, 1)$;

$$\left\| f - \sum_{n=1}^m 2(f, \sin(k\pi x)) \sin(k\pi x) \right\|_{L^2} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

En fin, on obtient en répondant à la question 2) :

Théorème. Soit $u_0 \in C^2([0, 1])$ définie par (7). Alors $u(t, x)$ définie par (8) appartient à $C(\mathbb{R}^+ \times [0, 1]) \cap C^\infty(\mathbb{R}^{+*} \times [0, 1])$, et une solution de (6).

Remarque. Unicité: il y a unicité des solutions de l'équation de la chaleur dans un domaine borné. Cependant, dans \mathbb{R}^n , il n'y en a pas en général. Mais si on suppose que $u_0 \in C_c(\mathbb{R}^n)$, il y a unicité des solutions même dans \mathbb{R}^n .

Exercice 4. Soit $u_0 \in H^2(\Omega)$. Montrer qu'il existe une unique solution de (1) qui s'écrit $u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} (u_0, e_j) e^{-\lambda_j t} e_j$ avec $u \in C(\mathbb{R}^+, H^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^{+*}, L^2(\Omega))$. (solution forte)

2.2. L'équation de Laplace (une équation elliptique). On considère dans cette section la plus simple des équations elliptiques. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine.

$$-\Delta u = f, \quad x \in \Omega \tag{10}$$

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée. Cette équation est appelée équation de Laplace si $f \equiv 0$, et équation de Poisson si $f \neq 0$.

Dans ces notes, on présente deux méthodes pour résoudre cette équation.

a. Utilisation de la solution fondamentale

Comme pour l'équation de la chaleur, on peut obtenir la solution fondamentale de l'équation de Laplace. (Dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$, transformée de Fourier et méthode de descente d'Hadamard) (admis)

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}|x|^{-(n-2)}, & n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \log|x|, & n = 2 \\ -\frac{1}{2}|x|, & n = 1 \end{cases} \quad (11)$$

où $\alpha(n)$ est le volume de la sphère unité dans \mathbb{R}^n .

Remarque. Γ vérifie $-\Delta\Gamma = \delta_0$ au sens distribution.

Considérons $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné dont le bord $\partial\Omega$ est suffisamment régulier. Pour fixer les idées, on suppose à partir de maintenant que Ω et $\partial\Omega$ vérifient toujours ces hypothèses. On propose d'obtenir une formule générale pour une solution de l'équation avec condition de Dirichlet.

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = g, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (12)$$

Proposition. (Formule de Green) Soit $w \in C^1(\bar{\Omega})$.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} w(x) n_i(x) dS_x$$

où $n_i(x)$ est la i -ème composante de $\vec{n}(x)$ (la normale unitaire orientée vers l'extérieur de Ω .)

En appliquant cette proposition pour $w = uv$, on obtient les corollaires suivants :

Corollaire 1. Soit $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $v \in C^1(\bar{\Omega})$, alors

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) n_i(x) dS_x.$$

Corollaire 2. Soit $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $v \in C^1(\bar{\Omega})$, alors

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \vec{n}(x) v(x) dS_x.$$

En utilisant la formule de Green, on va obtenir le théorème de représentation de solution de l'équation de Laplace.

Lemme 1. Soit u une fonction continue. La moyenne sphérique de u sur $\partial B(x, r)$:

$$U(x : r) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS_y$$

converge vers $u(x)$ lorsque $r \rightarrow 0$.

(Rappel: $\int_{\partial B(x,r)} dS_y = n\alpha(n)r^{n-1}$.)

Soit h vérifiant

$$h \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), \quad \Delta h = 0, \text{ dans } \Omega.$$

(on l'appelle un correcteur). Posons $G = h + \Gamma$, on a alors le résultat suivant :

Théorème. (Formule de représentation de Green)

La solution $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ de (12) s'écrit

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left\{ u \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} - G \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right\} dS_x + \int_{\Omega} G \Delta u dx. \quad (13)$$

G est appelée la fonction de Green pour le domaine Ω .

Remarque. Ainsi, si on arrive à construire la fonction de Green G associée à Ω , grace à (13) alors on obtient directement une formulation explicite pour les solutions du problème (12). Cependant ceci est en général un problème difficile, et il peut être résolu uniquement lorsque Ω a une géométrie simple. Par ex., dans le cas où $\Omega = B_R = B(R, 0)$ (boule centrée à l'origine de rayon R), avec $f \equiv 0$, on obtient :

$$u(y) = \frac{R^2 - |y|^2}{n\alpha(n)R} \int_{\partial B_R} \frac{g(y)}{|x - y|^n} dS_x, \quad x \in B_R.$$

Ce résultat est appelée "formule de l'intégrale de Poisson."

b. Utilisation de résultats de l'analyse fonctionnelle

On a vu que la solution de l'équation de Laplace s'exprime explicitement pour des domaines de géométrie simple. D'un autre côté, l'analyse fonctionnelle nous permet d'obtenir plus facilement des résultats sur l'existence des solutions dans des domaines assez généraux. On introduit le concept de solution faible.

Définition. On dit qu'une fonction $u \in H^1(\Omega)$ est une solution faible du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (14)$$

si, et seulement si, $u \in H_0^1(\Omega)$ et vérifie

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} u(x) f(x) dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (15)$$

Remarque. Une solution classique est une solution faible.

Soit, en posant,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx, \quad L(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

Lemme. (Inégalité de Poincaré: cf. le cours d'analyse fonctionnelle)

Soit Ω un ouvert borné. Il existe une constante $C = C(\Omega)$ telle que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$.

Ce lemme permet d'avoir le coercivité de forme bilinéaire $a(u, v)$ définie sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, et on obtient le résultat sur l'existence de solution en utilisant le théorème de Lax-Milgram.

Théorème. Soit $f \in L^2(\Omega)$. Alors, (la formulation variationnelle) $a(u, v) = L(v)$ admet une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$, qui est donc une solution faible de l'équation (14).

On présente une autre résolution.

Principe de Dirichlet (Calcul des variations)

Pour $w \in H_0^1(\Omega)$, on définit la fonctionnelle de la manière suivante :

$$I[w] = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - f w dx.$$

Théorème: On suppose que u est une solution faible de (14). Alors,

$$I[u] = \min_{w \in H_0^1(\Omega)} I[w]. \quad (16)$$

Réciproquement, si u vérifie (16), alors u est une solution faible de (14). Autrement dit, si $u \in H_0^1(\Omega)$, l'EDP $-\Delta u = f$ est équivalente à ce que u minimise $I[\cdot]$.

En fait on doit discuter tout d'abord l'existence d'un minimiseur du problème de minimisation

$$m = \inf_{w \in H_0^1(\Omega)} I[w].$$

$H^1(\Omega)$ était complet, on peut facilement montrer que m est atteint. Preuve laissé au lecteur (Exercice 5). Indice: Pour borner $\|u\|_{H^1(\Omega)}$, on utilise l'inégalité de Poincaré.

Remarque.

- Régularité à l'intérieur : une solution faible est en fait une solution classique. (C'est typique pour des équations elliptiques)

– L’unicité des solutions résulte du principe du maximum.

2.3. L’équation de transport (une équation hyperbolique). On considère le problème suivant : Soit $c \in \mathbb{R}$ une constante,

$$\begin{cases} \partial_t u + c \partial_x u = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (17)$$

Théorème. Pour tout $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, il existe une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ donnée par $u(t, x) = u_0(x - ct)$.

Remarque.

- $u(t, \cdot)$ a la même régularité que $u_0(\cdot)$.
- Propagation de l’information à vitesse finie : Si $\text{supp } u_0 \subset [a, b]$, alors $\text{supp } u(t, \cdot) \subset [a+ct, b+ct]$ (l’information se propage à la vitesse c). Soit un point $P(x_0, t_0)$. $u(P)$ est déterminé seulement par la valeur de u_0 à $x_0 - ct_0$. Donc “le domaine de dépendance” de P est le point $P_0(x_0 - ct_0, 0)$.
- Réversibilité en temps : le signe de c n’importe pas, la propriété de la solution ne change pas même si on change t en $-t$.
- La formule de Duhamel nous permet d’avoir une solution du problème inhomogène:

$$\begin{cases} \partial_t u + c \partial_x u = f(t, x), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), & f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}). \end{cases} \quad (18)$$

Dans ce cas, la solution est donnée par :

$$u(t, x) = u_0(x - ct) + \int_0^t f(s, x - c(t - s)) ds$$

Exercice 6 Montrer cette formule.

- On peut définir des solutions faibles ce qui permet de donner un sens à des solutions correspondant à des données initiales qui ne sont pas C^1 .
- Observons que nous avons dérivé la solution en convertissant l’EDP en une EDO. Cette procédure est un cas particulier de “la méthode des caractéristiques.”

2.4. L’équation des ondes (une équation hyperbolique). On considère une équation hyperbolique classique—l’équation des ondes à vitesse constante c :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = f(x), & \partial_t u(0, x) = g(x), \end{cases} \quad (19)$$

où $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ et $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ sont données. L’opérateur $\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2$ est appelé “le d’Alembertien.”

a. La formule de d’Alembert

Tout d’abord, supposons $n = 1$ et supposons qu’il y a une solution de (19). En

utilisant la méthode des caractéristiques au dessus appliquée à l'opérateur $\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2 = T_{-c} \circ T_c$ ou $T_c = \partial_t + c \partial_x$, on a obtenu formule de d'Alembert :

$$u(t, x) = \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (20)$$

Exercice 7. Vérifier que u donnée par l'expression (20) est $C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, et est une solution de (19).

Remarque. Le domaine de dépendance du point (x_0, t_0) est l'intervalle $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ sur l'axe des x . $u(t_0, x_0)$ dépend uniquement des valeurs de f et g dans l'intervalle $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$. Cette propriété peut s'interpréter comme le fait que les ondes se propagent avec une vitesse au plus égale à c . Un signal localisé dans le domaine D à l'instant $t = 0$ (i.e., données f, g à support dans D) affecte le point $x \in \mathbb{R}$ uniquement à partir de l'instant $t \geq \text{dist}(x, D)$ (pour $t < \text{dist}(x, D)$ on a $u(t, x) = 0$).

b. La formule de Kirchhoff

Rappel. (Moyenne sphérique sur $\partial B(x, r)$)

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, et $r > 0$.

$$U(x; t, r) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(t, y) dS_y.$$

On fixe $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ vérifiant (19) avec $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ et $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Alors $U(x; t, r) \in C^2(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_r^+)$ et vérifie les équations suivantes comme fonction de r et de t :

$$\begin{cases} \partial_t^2 U - c^2 \partial_r^2 U - c^2 \frac{n-1}{r} \partial_r U = 0, & r > 0, t > 0 \\ U = F, \quad U_t = G, & r > 0, \end{cases} \quad (21)$$

où F et G sont respectivement les moyennes sphériques de f et de g .

Exercice 8. Montrer que U vérifie (21).

Supposons $n = 3$ et $u \in C^2(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^3)$ une solution de (19). Posons $\tilde{U} = rU$, $\tilde{F} = rF$ et $\tilde{G} = rG$. On voit que \tilde{U} , \tilde{F} et \tilde{G} vérifient les équations :

$$\begin{cases} \partial_t^2 \tilde{U} - c^2 \partial_r^2 \tilde{U} = 0, & r > 0, t > 0 \\ \tilde{U} = \tilde{G}, \quad \tilde{U}_t = \tilde{H}, & r > 0, t = 0 \\ \tilde{U} = 0, & r = 0, t > 0 \end{cases} \quad (22)$$

qui est l'équation des ondes monodimensionnelle. En prolongeant \tilde{U} , \tilde{F} et \tilde{G} sur \mathbb{R}_r à la façon de réflexion impaire, on peut appliquer la formule de d'Alembert pour \tilde{U} . La dérivation en $r = 0$ de la formule obtenue donne la formule de Kirchhoff.

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi(ct)^2} \int_{\partial B(x, ct)} f(y) + tg(y) + \nabla f(y) \cdot (y - x) dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0. \quad (23)$$

Remarque.

- **le principe de Huygens** (n : impair, $n > 1$): Soit $n = 3$. D’après la formule (23), $u(t_0, x_0)$ dépend seulement des valeurs de f et de g (et dérivées) sur la sphère $\{x \in \mathbb{R}^3, |x_0 - x| = t_0\}$. Autrement dit, un signal localisé dans le domaine D à l’instant $t = 0$ est observable au point $x \in \mathbb{R}^3$ uniquement pendant le laps de temps $[t_1, t_2]$ où $t_1 = \inf_{y \in D} d(x, y)$ et $t_2 = \sup_{y \in D} d(x, y)$. Après l’instant t_2 , le signal a cessé d’avoir un effet au point x . Au contraire si n est pair, l’effet du signal persiste pour tout $t > t_1$ – cet effet s’amortit avec le temps, mais il ne disparaît jamais complètement.
 - Régularité : Dans le cas $n = 1$, si $f \in C^2$ et $g \in C^1$, alors $u \in C^2$. Dans le cas $n = 3$, si $f \in C^3$ et $g \in C^2$, alors $u \in C^2$. Mais u n’est pas nécessairement C^2 même lorsque $f, g \in C^2$. Il n’y a pas d’effet régularisant comme pour l’équation de la chaleur. Ceci implique qu’il existe probablement un autre moyen peut-être plus approprié pour mesurer la taille et la régularité des fonctions.
 - La solution fondamentale peut être obtenue comme pour l’équation de Laplace.
- c. **La méthode d’énergie** est utile si la vitesse n’est pas une constante, par ex., pour le cas $c = c(x)$. On présente cette méthode ici.

Définition.

Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un point fixé. On définit les domaines suivants :

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq t_0, |x - x_0| \leq c(t_0 - t)\}$$

$$D_t = \{x \in \mathbb{R}^n, |x - x_0| \leq c(t_0 - t)\}$$

le cône D est appelé le cône caractéristique de l’équation des ondes.

Soit $u \in C^2$ une solution de (19). On considère l’énergie pour D_t :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{D_t} \left\{ \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right)^2 + |\nabla_x u(t, x)|^2 \right\} dx$$

En utilisant la formule de Green, on peut montrer que $E(t)$ est décroissante et $E(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, t_0]$. Donc si $E(0) = 0$, alors $E(t) = 0$ pour tout $t \in [0, t_0]$. Ceci implique que $\partial u / \partial t = \nabla_x u = 0$ pour tout $(t, x) \in D$ et en conclusion u est constante dans D .

Théorème. Soit $u(t, x) \in C^2$ une solution de (19). Si $f = g = 0$ sur D_0 , alors $u \equiv 0$ dans D .

Corollaire. Soit $u(t, x), \tilde{u}(t, x) \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ des solutions de (19) correspondant respectivement aux f, g et \tilde{f}, \tilde{g} . Si $f(x) = g(x)$ et $\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x)$ sur D_0 , alors $u - \tilde{u} \equiv 0$ dans D . En particulier, au point (t_0, x_0) , on a $u(t_0, x_0) = \tilde{u}(t_0, x_0)$.

Remarque.

- Le domaine D_0 est le domaine de dépendance du point (t_0, x_0) (comme on a déjà vu.).
- Pour le cas $c = c(x)$, il suffit d'appliquer l'argument ci-dessus avec l'énergie

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{D_t} \left\{ \frac{1}{c(x)^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right)^2 + |\nabla_x u(t, x)|^2 \right\} dx$$

où le cône caractéristique aura un aspect “déformé” par la dépendance de c à x .

3. SCHÉMAS AUX DIFFÉRENCE FINIE

3.1. Introduction. En général, on ne sait pas calculer la solution explicitement, donc on a besoin de l'approcher numériquement, ce qui amène à l'approximation par des valeurs discrètes.

On se place en dimension 1 pour simplifier la présentation. On définit un maillage (une grille de points)

$$(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x), \quad n \geq 0, \quad j \in \mathbb{Z}$$

On ne s'occupe pas des conditions aux limites pour l'instant, mais on considérera les conditions aux limites de Dirichlet plus tard.

On note u_j^n la valeur d'une solution discrète approchée en (t_n, x_j) et $u(t_n, x_j)$ la solution exacte (inconnue) en ce point.

Différences finies : on remplace les dérivées partielles par des différences finies en utilisant des formules de Taylor dans lesquelles on néglige les restes (jusqu'à certains ordres) Par exemple : en 1-D, on a si Δx petit, d'après la formule de Taylor,

$$u(t, x + \Delta x) = u(t, x) + (\Delta x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{6} (\Delta x)^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O((\Delta x)^4).$$

$$u(t, x - \Delta x) = u(t, x) - (\Delta x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{6} (\Delta x)^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O((\Delta x)^4).$$

Donc, on obtient

$$u(t, x + \Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x - \Delta x) = (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O((\Delta x)^4)$$

Ainsi, pour Δx petit,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \simeq \frac{u(t, x + \Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

est une approximation du Laplacien en dimension un (formule centrée, approximation d'ordre 2).

3.2. Schémas pour l'équation de la chaleur. On considère une approximation pour l'équation de la chaleur:

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Pour la dérivée en temps, on utilise la formule centrée :

$$\partial_t u(t_n, x_j) \simeq \frac{u(t_n + \Delta t, x_j) - u(t_n - \Delta t, x_j)}{2(\Delta t)}.$$

En utilisant ceci et la formule pour le Laplacien, on obtient le schéma de Richardson : (symétrique en n et j)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2(\Delta t)} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0 \quad (24)$$

mais c'est instable (à ne pas utiliser). La difficulté en effet provient du caractère centré de la différence finie qui approche la dérivée en temps.

Autre choix : décentrage amont (on remonte le temps)

$$\partial_t u(t_n, x_j) \simeq \frac{u(t_n, x_j) - u(t_n - \Delta t, x_j)}{\Delta t}.$$

On obtient le schéma d'Euler rétrograde ou Euler implicite :

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0. \quad (25)$$

Choix symétrique: décentrage aval (on avance dans le temps)

$$\partial_t u(t_n, x_j) \simeq \frac{u(t_n + \Delta t, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t}$$

On obtient le schéma d'Euler progressif ou Euler explicite :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0. \quad (26)$$

Remarque : Pour obtenir les solutions discrètes de ces schémas, on se donne $u_0(x)$ que l'on discrétise en $u_j^0 = u_0(x_j)$, $j \in \mathbb{Z}$. Et puis, on utilise le schéma pour calculer $(u_j^{n+1})_{j \in \mathbb{Z}}$ une fois que l'on connaît $(u_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$ (sauf pour le 1er schéma, qui est un schéma à 3 niveaux, i.e., nécessite $(u_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$ et $(u_j^{n-1})_{j \in \mathbb{Z}}$).

Le schéma d'Euler explicite est effectivement explicite au sens où

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{(\Delta t)}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

Pour le schéma implicite, par contre, il faut résoudre un système linéaire à chaque pas de temps pour déterminer $(u_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$ en fonction de $(u_j^{n-1})_{j \in \mathbb{Z}}$, i.e., on a une équation implicite pour u_j^n .

Définition: On dit qu'un schéma pour l'équation de la chaleur est stable (en norme L^∞) s'il existe une constante $K < \infty$ indépendante de (Δt) et (Δx) telle que

$$\sup_j |u_j^n| \leq K \sup_j |u_j^0|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Remarque : cette condition de stabilité peut être différente selon les équations.

On vérifiera la proposition suivante.

Proposition : Le schéma explicite (26) est stable sous la condition

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (27)$$

et, instable si cette condition n'est pas satisfaite.

Remarque : la condition (27) s'appelle condition CFL (Courant-Friedrichs-Lewy).

Exercice 8: On considère le schéma implicite (25) avec des conditions de Dirichlet, i.e., on prend la formule (25) pour $1 \leq j \leq J$, et on impose $u_0^n = u_{J+1}^n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que ce schéma implicite est inconditionnellement stable (i.e., sans condition CFL) en norme L^∞ .

4. APPENDICE

Dans le cours, il y a des endroits où on donne une preuve formellement (pas rigoureux). Ici plusieurs outils et références sont organisés pour les comprendre profondément.

- Définition de la transformée de Fourier pour une distribution :

Rappel : La transformée de Fourier pour $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (l'espace de Schwartz) :

$$\hat{v}(\xi) = \mathcal{F}[v](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} v(x) dx.$$

La transformée de Fourier inverse :

$$\mathcal{F}^{-1}[v](x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} v(\xi) d\xi$$

Soit $T \in \mathcal{S}'$ une distribution. On définit la transformée de Fourier pour T par

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Remarque : Ainsi, en particulier (par ex., en dim 1), pour $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\langle \hat{\delta}_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx,$$

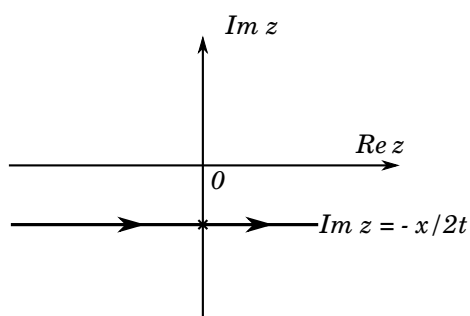
i.e., $\int_{\mathbb{R}} \hat{\delta}_0 \varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi$, d'où $\hat{\delta}_0 = \frac{1}{2\pi}$.

- Théorème intégral de Cauchy (cf. cours analyse complexe) appliqué au calcul d'une intégrale complexe

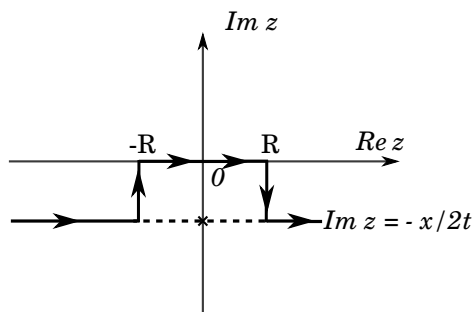
Dans la section 2, on a dérivé la solution fondamentale pour l'équation de la chaleur en utilisant la transformée de Fourier. On avait besoin de calculer l'intégrale complexe suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t(\xi - \frac{x}{2t}i)^2} d\xi$$

Le changement de variable $z = \xi - \frac{x}{2t}i$, ($-\infty < \xi < \infty$) donne l'intégrale sur le chemin suivant.



Comme l'intégrand est analytique, en utilisant le théorème intégral de Cauchy, on peut changer le chemin comme ci-dessous :



Grace à ce changement, on peut récupérer seulement le chemin sur l'axe réel. Ça veut dire,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t(\xi - \frac{x}{2t}i)^2} d\xi \\ &= \int_{-\infty - \frac{x}{2t}i}^{-R - \frac{x}{2t}i} + \int_{-R - \frac{x}{2t}i}^{-R} + \int_{-R}^R + \int_R^{R - \frac{x}{2t}i} + \int_{R - \frac{x}{2t}i}^{+\infty - \frac{x}{2t}i} e^{-tz^2} dz. \end{aligned}$$

Et, lorsque $R \rightarrow \infty$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t(\xi - \frac{x}{2t}i)^2} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tz^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{t}}, \quad t > 0.$$

- Définition de la solution faible :

Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$, et soit un temps final $T > 0$. On dit que une fonction $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ avec $\partial_t u \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ est une solution faible de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & \forall x \in \Omega, \forall t \in]0, T[, \\ u(0, x) = u_0(x), & \forall x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0, & \forall x \in \partial\Omega, \forall t \in]0, T[\end{cases} \quad (28)$$

si et seulement si

- (i) $\langle \partial_t u, v \rangle + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = 0$, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, et p.p. $t \in [0, T]$,
- (ii) $u(0) = u_0$

où $H^{-1}(\Omega)$ est l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.

Avec cette définition, on pourra essayer de montrer le fait suivant:

Exercice 9 : Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n , et une donnée initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$. Alors l'équation (28) admet une unique solution $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ (au sens faible).

Remarque

- Pour l'équation de la chaleur, une solution faible est en fait C^∞ (l'effet régularisant). Plus précisément, la solution qui vérifie l'équation (28) ci-dessus a la propriété suivante : “pour tout $\varepsilon > 0$, $u(t, x)$ est de classe C^∞ en x et t dans $\bar{\Omega} \times [\varepsilon, T]$.” (Attention pour la régularité en $t = 0$).
- Pour montrer que une solution faible est une solution forte dans le cas de l'équation elliptique, on utilise l'argument “bootstrap” (voir Brezis IX.6). En fait l'effet régularisant pour l'équation de la chaleur (28) peut être vérifié par cette régularité elliptique (voir Allaire Chapitre:problèmes d'évolution).

- Volume de la sphère unité

Soit $V^{(n)}$ le volume de la sphère unité en dimension n . On remarque

$$V^{(n+1)} = V^{(n)} \int_{-1}^1 (\sqrt{1-x^2})^n dx = 2V^{(n)} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n}{2}} dx$$

Le changement de variable $x = \sqrt{1-u}$ donne

$$V^{(n+1)} = V^{(n)} \int_0^1 u^{n/2} (1-u)^{-1/2} du = V^{(n)} B\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{1}{2}\right),$$

où $B(p, q)$ est la fonction de Beta. En utilisant la relation entre la fonction de Gamma et la fonction de Beta, et par l'induction, on obtient,

$$V^{(n)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

- La formule de Duhamel (Principe de Duhamel) est l'analogie de la formule de variation de la constante pour les équations différentielles ordinaires. Par exemple (l'équation de transport):

$$\begin{cases} \partial_t u + c \partial_x u = f(t, x), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (29)$$

où $f \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}$. Si on note $T(t)$ l'opérateur linéaire $u_0 \mapsto u(t, \cdot) = u_0(\cdot - ct)$, alors la solution de l'équation ci-dessus peut être écrite comme suit :

$$u(t, \cdot) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, \cdot)ds.$$

- L'injection de Sobolev (voir Adams)

5. RÉFÉRENCES

- R.Adams, Sobolev spaces
- H.Brezis, Analyse Fonctionnelle
- L.C.Evans, Partial Differential Equations
- G.Allaire, Analyse numérique et optimisation. Editions Ecole Polytechnique