Anné と Colbois の論文の解説

“Spectre du Laplacien agissant sur les p-formes différentielles et écrasement d’anses”,

Math. Ann. **303** (1995), 545–573.

東大数理　　高橋淳也

(2001 年 9 月 13 日– 14 日（於：東北大学）)

目 次

1 Introduction.

1.1 Introduction.

このノートの目標は C. Anné と B. Colbois の論文

Spectre du Laplacien agissant sur les p-formes différentielles et écrasement d’anses, Math. Ann. **303** (1995), 545–573,

の解説を行うことである．この論文の主定理は，例えば下の図 のようなハンドルの付いた多様体において，ハンドルの半径を 0 に潰す崩壊における，微分形式に作用する Laplacian の固有値の収束の記述である．

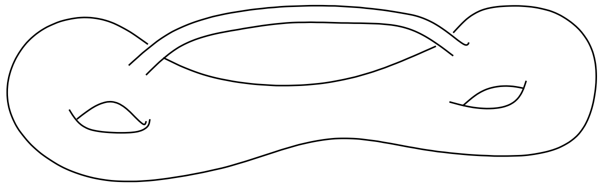

図 1: ハンドルの崩壊

$M = (M, g)$ を $m \geq 3$ 次元の連結向きづけ可能な閉（コンパクトで境界が無い）Riemann 多様体とする．技術的に簡略化するための仮定として 2 点 $P, Q \in M$ の近傍で計量 g は Euclid 的であるとする．なお，この仮定は [AC-93] により，取り除くことができる．簡単のため以下では，半径 1 の測地球 $B(P, 1)$ と $B(Q, 1)$ 上で g が Euclid 的で，$1 < \mathrm{Inj}(M, g)$ かつ $B(P, 1) \cap B(Q, 1) \neq \phi$ とする．十分小さい $0 < \varepsilon << 1$ に対して，

$$M_\varepsilon := M \setminus \{B(P, \varepsilon) \cup B(Q, \varepsilon)\}$$

と置く．半径 ε の $\mathbb{R}^m$ 内の標準的球面を $S^{m-1}_{(\varepsilon)}$ と書くとき，ハンドル $C_\varepsilon := ([0, L] \times S^{m-1}_{(\varepsilon)}, ds^2 \oplus \varepsilon^2 \, h_{S^{m-1}_{(1)}})$ と書く．ただし，s は $[0, L]$ の座標，$h_{S^{m-1}_{(1)}}$ は $S^{m-1}_{(1)}$ の計量とする．この時，M_ε と C_ε の境界を

$$\partial B(P, \varepsilon) \;\sim\; \{0\} \times S^{m-1}_{(\varepsilon)}, \quad \partial B(Q, \varepsilon) \sim \{L\} \times S^{m-1}_{(\varepsilon)}$$

なる同一視して得られる多様体を $\tilde{M}_\varepsilon := M_\varepsilon \cup C_\varepsilon$ とする（図 1 を見よ）．そして，$\tilde{M}_\varepsilon$ が向き付けられるように M_ε と C_ε の向きを選ぶ．ここで注意すべきことは，$\tilde{M}_\varepsilon$ は多様体としては C^∞ であるが，計量は貼り付けの部分で C^∞ ではない，区分的 C^∞ 級の計量であるという点である．しかし，このような区分的 C^∞ 級の計量を備えた，連結，向き付けられた C^∞ 級の閉多様体に対して，自然な Laplacian を定義し，そのスペクトル幾何学が通常の場合と同様に展開できることを示す（2.1, 3.2 節）．その Laplacian の固有値を次のように書く．

$$0 \leq \lambda_1^{(p)}(\tilde{M}_\varepsilon) \leq \lambda_2^{(p)}(\tilde{M}_\varepsilon) \leq \cdots \leq \lambda_k^{(p)}(\tilde{M}_\varepsilon) \leq \cdots .$$

[AC-95] の論文の 1 つの目標は次の Theorem A を証明することである．このノートの目的もこの定理の証明を与えることにある．

Theorem 1.1.1 ([AC-95] Theorem A). $\tilde{M}_\varepsilon$ を上のように得られた連結，向き付けられた，閉多様体で，計量は貼り付けの部分で連続となるものが入っているとする．今，

$$0 \leq \mu_1^{(p)} \leq \mu_2^{(p)} \leq \cdots \leq \mu_k^{(p)} \leq \cdots$$

を次の様に定める．

- $2 \leq p \leq m-2$ のとき，M の *p-form* の固有値とする．
- $p=0,1$ のとき，M の *p-form* の固有値と，区間 $[0,L]$ の *relative boundary condition* の下での *p-form* の固有値を小さい順に並べたもの．

このとき，$k \geq 0$ と $0 \leq p \leq m-2$ に対して，固有値の収束

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_k^{(p)}(\tilde{M}_\varepsilon)=\mu_k^{(p)},$$

が成立する．なお，$p=m-1,m$ の場合は双対性から $p=1,\ 0$ の場合と一致する．さらに，コホモロジー群は

$$\begin{aligned} p &= 1,m-1 \text{ の時，} \quad \dim H^p(\tilde{M}_\varepsilon)=\dim H^p(M)+1,\\ p &\neq 1,m-1 \text{ の時，} \quad \dim H^p(\tilde{M}_\varepsilon)=\dim H^p(M). \end{aligned}$$

Remark 1.1.2. 区間 $[0,L]$ の *relative boundary condition* の下での *p-form* の固有値とは，$p=0$ の時は，*Dirichet boundary condition*，すなわち，$f(0)=f(L)=0$ を課したものである．$p=1$ の時は，1-*form* は $f(s)ds$ の様に書け，$f(s)$ に *Neuman boundary condition*，すなわち，$f'(0)=f'(L)=0$ を課したものである．境界付き多様体上の微分形式の境界条件については，3.1 節において一般的状況で述べる．

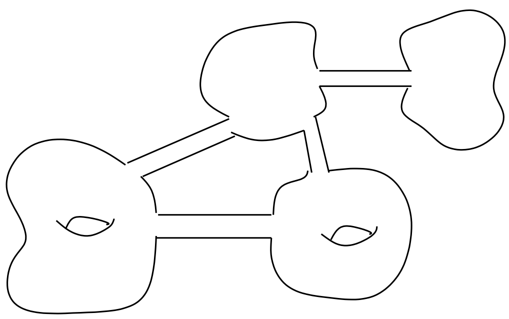

図 2: 沢山のハンドルの崩壊

Theorem A の状況を一般化して，有限個の多様体とその間に全体として，連結になるようにハンドルをくっ付け合ってできる多様体で，そのハンドルを潰した際の固有値の収束も分かる．

Theorem 1.1.3 ([AC-95] Theorem B). $\tilde{M}_\varepsilon$ を，連結閉 *Riemann* 多様体 M_1, $\ldots,M_N$ に M_i と M_j を長さ L_{ij} のハンドルで繋いだ，連結，向き付けられた，閉多様体で，計量は貼り付けの部分で連続となるものとする（図 *3*）． この *p-form* に作用するの *Laplacian* の固有値を

$$0\leq\lambda_1^{(p)}(\tilde{M}_\varepsilon)\leq\lambda_2^{(p)}(\tilde{M}_\varepsilon)\leq\cdots\leq\lambda_k^{(p)}(\tilde{M}_\varepsilon)\leq\cdots$$

と書く．いま，

$$0 \leq \mu_1^{(p)} \leq \mu_2^{(p)} \leq \cdots \leq \mu_k^{(p)} \leq \cdots$$

を次の様に定める．

- $2 \leq p \leq m-2$ のとき，M_j $(j=1,\ldots,N)$ の *p-form* の固有値を小さい順に並べたもの．
- $p=0,1$ のとき，M_j $(j=1,\ldots,N)$ の *p-form* の固有値と，区間 $[0, L_{ij}]$ の *relative boundary condition* の下での *p-form* の固有値とを，小さい順に並べたもの．

このとき，$k \geq 0$ と $0 \leq p \leq m-2$ に対して，固有値の収束

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_k^{(p)}(\tilde{M}_\varepsilon) = \mu_k^{(p)},$$

が成立する．$p = m-1, m$ の場合は双対性から $p = 1,\ 0$ の場合と一致する．さらに，コホモロジー群は

$$\begin{aligned}
p &= 0 \text{ の時,} \quad \dim H^0(\tilde{M}_\varepsilon) = \dim H^0(M),\\
p &= 1, m-1 \text{ の時,} \quad \dim H^p(\tilde{M}_\varepsilon) = \sum_{j=1}^{N} \dim H^p(M) + a - (N-1),\\
p &\neq 1, m-1 \text{ の時,} \quad \dim H^p(\tilde{M}_\varepsilon) = \sum_{j=1}^{N} \dim H^p(M).
\end{aligned}$$

ここに，a はハンドルの数である．

Theorem B の証明方法は本質的に Theorem A の方法と同様である．よって，我々は，基本となる Theorem A に絞って，その証明を見ていくことにする．

このノートの構成は以下の通りである：

第 2 章では関数（$p=0$ のとき）に作用する Laplacian の固有値について，Theorem A を証明する．関数の場合は $m=2$ の時でも成立する．基本的な証明の方針は微分形式の場合も同様なので，技術的に複雑でない関数の場合を先に行うことで証明の粗筋が見えてくると思う．関数の場合は Anné [A-87] で証明された結果だが，証明を（分かり易いように）書き直した．なお，[A-87] の証明ではある評価に欠陥があったが（p.275, l.11），結果自体は正しく，その証明の修正は [A-99] で与えられている．ちなみに，著者はこの方法に従って，連結和の崩壊と固有値の収束定理を示した [T-01]．しかし，微分形式の場合は未完成である．

第 3 章では微分形式の場合に Theorem A を証明する．証明の方針は関数の場合と同様と言ったが，個々のステップが関数の場合と比べて非常に技巧的である．それらをできるだけ分かり易いように記述したつもりである．彼等はこの論文の前に [AC-93] において，多様体から有限個の ε-ball を取り除き，その半径 ε を 0 へ近づけた際の固有値の収束定理を証明しいる．そこで開発された技術がここで大きく効いている．

なお，論文では固有値の収束だけでなく，1-form の 0 へ収束する固有値の漸近的振る舞いとその対応する固有形式の収束についても述べているが，著者自身の力不足のため割愛せざるを得ない．また，できる限り分かり易いように書いたつもりだが，これも力不足，理解不足のためそれに至らなかったかもしれない．以上の点についてお詫び致します．

Acknowledgement. 発表の機会を与えて下さいました，塩谷隆先生に感謝致します．

2 関数の場合

この章では，$m \geq 2$ の時，関数に作用する Laplacian の固有値について Theorem 1.1.1 を示す．まず，2.1 で $\tilde{M}_\varepsilon$ の Laplacian 等の定義をする．その後，2.2 で $\tilde{M}_\varepsilon$ の固有値の上からの評価を行い， 2.3 では下からの評価を行って証明が完了する．

2.1 Sobolev 空間と Laplacian

この節では，$\tilde{M}_\varepsilon$ 上の解析を M_ε と C_ε の別々に議論するため，Anné と Colbois によって導入された Sobolev 空間と Laplacian を復習する．

まず，M_ε 上の L^2 空間を，それぞれのペアとして定める．

Definition 2.1.1.

$$L^2(\tilde{M}_\varepsilon) \ := \ L^2(M_\varepsilon) \times L^2(C_\varepsilon).$$

次に，$\tilde{M}_\varepsilon$ 上の Sobolev 空間 H^1 と H^2 を定めるために， M_ε と C_ε の境界に適当な貼り付け条件を課す．ここで，境界値は trace 作用素の意味で取る (例えば，[RR-92] を参照)．

Definition 2.1.2.

$$\begin{aligned} H^1(\tilde{M}_\varepsilon) \ &:= \ \{f = (f_1, f_2) \in H^1(M_\varepsilon) \times H^1(C_\varepsilon) \mid f_1 \restriction_{\partial M_\varepsilon} = f_2 \restriction_{\partial C_\varepsilon} \ \ in \ L^2(\partial M_\varepsilon)\}. \\ H^2(\tilde{M}_\varepsilon) \ &:= \ \{f = (f_1, f_2) \in H^2(M_\varepsilon) \times H^2(C_\varepsilon) \mid f_1 \restriction_{\partial M_\varepsilon} = f_2 \restriction_{\partial C_\varepsilon} \ \ in \ H^1(\partial M_\varepsilon), \\ &\qquad \nu_1(f_1) \restriction_{\partial M_\varepsilon} = -\nu_2(f_2) \restriction_{\partial C_\varepsilon} \ \ in \ L^2(\partial M_\varepsilon)\}. \end{aligned}$$

ただし，ν_1 と ν_2 は，それぞれ ∂M_ε と ∂C_ε に沿った外向きの単位法ベクトル場である．

ここで導入した Sobolev 空間の内積は，M_ε と C_ε の空間の内積の直和内積とする．

次に，$\tilde{M}_\varepsilon$ 上の 2 次形式 q_ε と，Laplacian Δ_ε を定める．

Definition 2.1.3. 各 $f = (f_1, f_2) \in \mathrm{Dom}(\Delta_\varepsilon) := H^2(\tilde{M}_\varepsilon)$ に対し，$\tilde{M}_\varepsilon$ 上の *Laplacian* Δ_ε を

$$\Delta_\varepsilon(f_1, f_2) \ := \ (\Delta_{M_\varepsilon} f_1, \Delta_{C_\varepsilon} f_2)$$

で定める．ここに，Δ_M は *Riemann* 多様体 M 上の通常の *Laplacian* である．

今定義した Laplacian は自己共役な 2 階の楕円型作用素であり，そのスペクトルは固有値のみからなる．すなわち，閉 Riemann 多様体の通常の Laplacian の性質をすべて満足する．$\tilde{M}_\varepsilon$ の固有値とは，この Laplacian の固有値のことである．

Definition 2.1.4. 2 次形式 q_{M_ε}，q_{C_ε} を

$$\begin{aligned} q_{M_\varepsilon}(f_1,h_1) &:= \int_{M_\varepsilon} \langle df_1, dh_1\rangle d\mu_{M_\varepsilon} \quad (f_1,h_1\in H^1(M_\varepsilon)), \\ q_{C_\varepsilon}(f_2,h_2) &:= \int_{C_\varepsilon} \langle df_2, dh_2\rangle d\mu_{C_\varepsilon} \quad (f_2,h_2\in H^1(C_\varepsilon)) \end{aligned}$$

で定め，また $\mathrm{Dom}(q_\varepsilon) := H^1(\tilde{M}_\varepsilon)$ 上の 2 次形式 q_ε を，$f=(f_1,f_2), h=(h_1,h_2)\in \mathrm{Dom}(q_\varepsilon)$ に対し，

$$q_\varepsilon(f,h) \;:=\; q_{M_\varepsilon}(f_1,h_1)+q_{C_\varepsilon}(f_2,h_2)$$

で定める．

Lemma 2.1.5. 2 次形式 q_ε は *Laplacian* Δ_ε から引き起こされる，すなわち，$f=(f_1,f_2)\in \mathrm{Dom}(\Delta_\varepsilon)$ と $h=(h_1,h_2)\in\mathrm{Dom}(q_\varepsilon)$ に対して，

$$q_\varepsilon(f,h) \;=\; (\Delta_\varepsilon f, h)_{L^2(\tilde{M}_\varepsilon)}.$$

Proof. 証明は M_ε と C_ε のそれぞれの部分で Stokes の定理を実行する．その際に境界の積分の項が生じるが，貼り付け条件よりお互いにキャンセルすることから分かる． □

2.2 固有値の上からの評価

この節の目標は，次の Proposition を示すことである．

Proposition 2.2.1 (上からの評価)**.**

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\lambda_k(\tilde{M}_\varepsilon)\le \mu_k$$

この証明は min-max 原理を用いて示すのだが，ここで用いる min-max 原理について復習しておこう．これは，微分形式の場合も成立し，以後よく用いる．

Lemma 2.2.2 (min-max 原理)**.**

$$\lambda_k(\tilde{M}_\varepsilon)=\inf_{E_\varepsilon\subset H^1(\tilde{M}_\varepsilon)}\sup_{u_\varepsilon\neq 0\in E_\varepsilon}\left\{\frac{q_\varepsilon(u_\varepsilon,u_\varepsilon)}{\|u_\varepsilon\|^2_{L^2(M_\varepsilon)}}\right\}.$$

ここに，E_ε は $H^1(M,g_\varepsilon)$ の k 次元部分空間を亘る．

さて，Proposition 2.2.1 を証明しよう．

Proof. f_i $(i = 1, 2, \ldots,)$ を M 上の固有値 $\lambda_i(M)$ に対応する固有関数で，互いに L^2 内積に関して正規直交となるものとする．今，cut-off function χ_ε を次のように定める．

$$\chi_\varepsilon(r) := \begin{cases} 0 & (0 \le r \le \varepsilon), \\ -\frac{2}{\log\varepsilon} \log\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) & (\varepsilon \le r \le \sqrt{\varepsilon}), \\ 1 & (\sqrt{\varepsilon} \le r). \end{cases}$$

ただし，r は P あるいは $Q \in M$ からの距離である．この log 型の cut-off function は Courtois [Ct-87] によって構成された．

次に，h_j $(j = 1, 2, \ldots,)$ を $[0, L]$ 上の Dirichlet 条件を満たす固有値 $\mu_j(0, L)$ に対応する固有関数で，互いに L^2 内積に関して正規直交となるものとする．この時，各 h_j は自然に $\tilde{M}_\varepsilon$ 上の関数 $\tilde{h}_j$ とみなせる．実際，ハンドル C_ε の $S^{m-1}_{(\varepsilon)}$ 方向へ平行に伸ばし，M_ε へ 0 拡張で伸ばす．ここで，h_j が Dirichlet 境界条件を満たしていることから，$\tilde{h}_j \in H^1(\tilde{M}_\varepsilon)$ である．

この時，E_ε を $\{\chi_\varepsilon f_1, \chi_\varepsilon f_2, \ldots, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \ldots\}$ によって生成される部分空間とする．ただし，$\chi_\varepsilon f_i$ と $\tilde{h}_j$ は $\mu_1 \le \cdots \le \mu_k$ に現れる M, $[0, L]$ の固有値に対応して取ってくる．すると，この E_ε は $H^1(\tilde{M}_\varepsilon)$ の k 次元部分空間になるので，Lemma 2.2.2 から，

$$\lambda_k(\tilde{M}_\varepsilon) \le \sup_{u_\varepsilon \neq 0 \in E_\varepsilon} \left\{ \frac{q_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon)}{\|u_\varepsilon\|^2_{L^2(\tilde{M}_\varepsilon)}} \right\} \tag{2.2.1}$$

である．

$\mathrm{supp}(\chi_\varepsilon f_i) \cap \mathrm{supp}(\tilde{h}_j) = \phi$ より，(2.2.1) の右辺はそれぞれ，u_ε として $\chi_\varepsilon f_i$ あるいは $\tilde{h}_j$ のみで計算すれば十分である．

最初に $\chi_\varepsilon f_i$ の場合．$m \ge 2$ なので，

$$\int_{B(x_1, \sqrt{\varepsilon})} |d\chi_\varepsilon|^2_{g_1} d\mu_{g_1} = \frac{4\,\mathrm{vol}(S^{m-1}(1))}{(\log\varepsilon)^2} \int_\varepsilon^{\sqrt{\varepsilon}} r^{m-3} dr \to 0,\ \varepsilon \to 0$$

である．このことを用いて計算すると，右辺は

$$\lambda_i(M) + \delta(\varepsilon)$$

という形で評価できる．ただし，$\delta(\varepsilon)$ は $\varepsilon \to 0$ の時 $\to 0$ となる項である．

一方，$\tilde{h}_j$ の場合は，簡単に

$$\lambda_j(\tilde{M}_\varepsilon) \le \mu_j([0, L])$$

が分かる．

ゆえに，この 2 つの結果を合わせると，Proposition 2.2.1 が分かる． □

2.3 固有値の下からの評価

この節の目標は，次の Proposition を示すことである．これが示されれば，前節の結果と合わせて，関数の場合の Theorem 1.1.1 が証明される．

Proposition 2.3.1 (下からの評価).

$$\mu_k \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \lambda_k(\tilde{M}_\varepsilon)$$

なお，この節では C で添字や関数によらない正の定数を表わすことにする．

Proof. 最初に $\alpha_j := \liminf_{\varepsilon\to 0} \lambda_k(\tilde{M}_\varepsilon)$ と置く．

$f_{j,\varepsilon} = (f^1_{j,\varepsilon}, f^2_{j,\varepsilon}) \in \mathrm{Dom}(q_\varepsilon)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ を固有値 $\lambda_j(\tilde{M}_\varepsilon)$ に関する正規直交的な固有関数とする．我々は $f_{j,\varepsilon}$ から (M, g) と $[0, L]$ の固有関数を構成したい．

まず，$f^1_{j,\varepsilon}$ を $B(P, \varepsilon)$ と $B(Q, \varepsilon)$ 上へ調和関数として拡張した関数 $\bar{f}^1_{j,\varepsilon} \in H^1(M)$ が存在し，次の評価式が成立する ([RT-75])：

$$\|\bar{f}^1_{j,\varepsilon}\|_{H^1(M,g)} \leq C\|f^1_{j,\varepsilon}\|_{H^1(M_\varepsilon,g)}. \tag{2.3.1}$$

すると，2.3 節の固有値の上への有界性から，族 $\{\bar{f}^1_{j,\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ は $H^1(M)$ ノルムに関して一様有界であることが分かる．実際，

$$\begin{aligned} \|\bar{f}^1_{j,\varepsilon}\|^2_{H^1(M)} &\leq C\|f^1_{j,\varepsilon}\|^2_{H^1(M_\varepsilon)} \\ &\leq C\{1 + q_\varepsilon(f_{j,\varepsilon})\} \\ &\leq C\{1 + \lambda_j(\tilde{M}_\varepsilon)\} \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

だからである．よって，弱コンパクト性定理から，ある部分列 $\{\bar{f}^1_{j,\varepsilon_i}\}_{i=1}^\infty$ と $\bar{f}^1_j \in H^1(M, g)$ が存在して，$\lambda_j(M_{\varepsilon_i}) \to \alpha_j$ かつ $\bar{f}^1_{j,\varepsilon_i} \to \bar{f}^1_j$ $(\varepsilon_i \to 0)$ $H^1(M)$ 弱収束する．さらに，Rellich の定理より，埋め込み $H^1(M, g) \subset L^2(M, g)$ はコンパクトなので，$\{\bar{f}^1_{j,\varepsilon_i}\}_i$ は $L^2(M, g)$ で強収束する．

この時，極限 $\bar{f}^1_j$ が (M, g) の固有関数，または 0 になることを示す．すべての support がコンパクトな C^∞ 関数 $\varphi \in C^\infty_0(M \setminus \{P, Q\})$ に対して，

$$\begin{aligned} q_M(\bar{f}^1_j, \varphi) &= \lim_{i\to\infty} \{q_{M_{\varepsilon_i}}(f^1_{j,\varepsilon_i}, \varphi) + q_{C_{\varepsilon_i}}(f^2_{j,\varepsilon_i}, 0)\} \\ &= \lim_{i\to\infty} q_{\varepsilon_i}((f^1_{j,\varepsilon_i}, f^2_{j,\varepsilon_i}), (\varphi, 0)) \\ &= \lim_{i\to\infty} \lambda_j(q_{\varepsilon_i})\,((f^1_{j,\varepsilon_i}, f^2_{j,\varepsilon_i}), (\varphi, 0))_{L^2(M_{\varepsilon_i})} \\ &\qquad (f_{j,\varepsilon_i} \text{ は } q_{\varepsilon_i} \text{ の固有関数より}) \\ &= \alpha_j\,(\bar{f}^1_j, \varphi)_{L^2(M,g)}. \end{aligned}$$

の成立が分かる．今，$m \geq 2$ より capacity $\mathrm{cap}(\{P, Q\}) = 0$ なので，埋め込み $C^\infty_0(M \setminus \{P, Q\}) \subset H^1(M, g)$ は dense である．よって，すべての $\varphi \in H^1(M, g)$ に対して，$q_M(\bar{f}^1_j, \varphi) = \alpha_j(\bar{f}^1_j, \varphi)_{L^2(M,g)}$ が成立する．弱解の正則性定理から，$\bar{f}^1_j \in C^\infty(M)$ であり $\Delta_M \bar{f}^1_j = \alpha_j \bar{f}^1_j$ が成立する．

次に，$f^2_{j,\varepsilon}$ の方について考察する．まず，$\tilde{f}^2_{j,\varepsilon} := \varepsilon^{\frac{m-1}{2}} f^2_{j,\varepsilon}$ とスケール変換する．すると，(2.3.2) と (2.3.4) により，$\{\tilde{f}^2_{j,\varepsilon_i}\}_i$ は $H^1(C_1)$ で一様有界なことが分かるので，部分列 $\{\tilde{f}^2_{j,\varepsilon_i}\}_i$ と $\tilde{f}^2_j \in H^1(C_1)$ が存在して，$\tilde{f}^2_{j,\varepsilon_i} \to \tilde{f}^2_j$ $(i \to \infty)$ が $H^1(C_1)$ 弱収束，かつ，$L^2(C_1)$ 強収束する．

今，$\pi : C_1 = [0, L] \times S^{m-1}_{(1)} \to [0, L]$ として，C_1 を底空間 $[0, L]$ で fiber が S^{m-1} である trivial bundle の全空間とみる．d_V を垂直方向の外微分，すなわち，$d_{S^{m-1}}$ とし，d_H を水平方向外の微分，すなわち，$d_{[0,L]} = \partial_s$ とする．$\tilde{f}^2_{j,\varepsilon_i} \to \tilde{f}^2_j$ $(i \to \infty)$ は $H^1(C_1)$ で弱収束するので，$d_V \tilde{f}^2_{j,\varepsilon_i} \to d_V \tilde{f}^2_j$ $(i \to \infty)$ は $L^2(M_2(1), g_2)$ で弱収束する．一般に，$a_i \geq 0$ である数列 $\{a_i\}_i$ に対して $(\liminf_i a_i)^2 \leq \liminf_i (a_i)^2$ であること（[Su-80], p.366, 問題 3）に注意すると，

$$\|d_V \tilde{f}^2_j\|^2_{L^2(C_1)} \;\leq\; \liminf_{i\to\infty} \|d_V \tilde{f}^2_{j,\varepsilon_i}\|^2_{L^2(C_1)} \tag{2.3.3}$$

が成立する．ここで，右辺を評価する．

$$\begin{aligned}
\|d_V \tilde{f}^2_{j,\varepsilon_i}\|^2_{L^2(C_1)} &= {\varepsilon_i}^2 \,\|d_V f^2_{j,\varepsilon_i}\|^2_{L^2(C_\varepsilon)} \\
&\leq {\varepsilon_i}^2 \,\{\|d_V f^2_{j,\varepsilon_i}\|^2_{L^2(C_\varepsilon)} + \|d_H f^2_{j,\varepsilon_i}\|^2_{L^2(C_\varepsilon)}\} \\
&= {\varepsilon_i}^2 \, q_{C_{\varepsilon_i}}(f^2_{j,\varepsilon_i}) \leq {\varepsilon_i}^2 \, q_{\varepsilon_i}(f_{j,\varepsilon_i}) \\
&= {\varepsilon_i}^2 \lambda_j(\tilde{M}_{\varepsilon_i}) \to 0 \ (i \to \infty)
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

であるので，$d_V \tilde{f}^2_j \equiv 0$，すなわち，$\tilde{f}^2_j$ は $s \in [0, L]$ のみの関数である．

次に，$\tilde{f}^2_j \restriction_{\partial C_1} = 0$，すなわち，Dirichlet 条件を満たすことが分かる．

Lemma 2.3.2 ([A-87])**.**

$$\|\tilde{f}^2_{j,\varepsilon_i} \restriction_{\partial C_1} \|_{L^2(\partial C_1)} \;\leq\; \begin{cases} C\sqrt{\varepsilon_i |\log \varepsilon_i|}\, \|f^1_{j,\varepsilon_i}\|_{H^1(M_{\varepsilon_i})} & (m = 2), \\ C\sqrt{\varepsilon_i}\, \|f^1_{j,\varepsilon_i}\|_{H^1(M_{\varepsilon_i})} & (m \geq 3). \end{cases}$$

Proof. f_{j,ε_i} の貼り付け条件 (Definition 2.1.2) から，

$$\|\tilde{f}^2_{j,\varepsilon_i} \restriction_{\partial C_1} \|_{L^2(\partial C_1)} \;=\; \|f^2_{j,\varepsilon_i} \restriction_{\partial C_{\varepsilon_i}} \|_{L^2(\partial C_{\varepsilon_i})} = \|f^1_{j,\varepsilon_i} \restriction_{\partial M_{\varepsilon_i}} \|_{L^2(\partial M_{\varepsilon_i})}$$

である．よって，最後の項を評価しよう．$C^\infty(\bar{M}_{\varepsilon_i}) \subset H^1(M_{\varepsilon_i})$ は dense なので，$f \in C^\infty(\bar{M}_{\varepsilon_i})$ に対して評価をすればよい．cut-off function χ に対して，Schwarz の不等式を用いると

$$\begin{aligned}
|f(\varepsilon_i, \theta)| &= |-\int_{\varepsilon_i}^1 \frac{\partial}{\partial r}(\chi f)(r, \theta)\, dr| \\
&\leq \int_{\varepsilon_i}^1 |\frac{\partial}{\partial r}(\chi f)(r, \theta)|\, dr \\
&= \int_{\varepsilon_i}^1 r^{-\frac{m-1}{2}} \cdot |\frac{\partial}{\partial r}(\chi f)(r, \theta)| r^{\frac{m-1}{2}}\, dr \\
&\leq \{\int_{\varepsilon_i}^1 r^{-(m-1)} dr\}^{\frac{1}{2}} \{\int_{\varepsilon_i}^1 |\frac{\partial}{\partial r}(\chi f)(r, \theta)|^2 r^{(m-1)}\, dr
\end{aligned}$$

となる．よって，$\partial M_{\varepsilon_i} = S^{m-1}_{(\varepsilon_i)}$ 上積分すると，

$$
\begin{aligned}
\|f^1_{j,\varepsilon_i}\restriction_{\partial M_{\varepsilon_i}}\|^2_{L^2(\partial M_{\varepsilon_i})} &= \int_{S^{m-1}\ni\theta} |f(\varepsilon_i,\theta)|^2\, d\mu_{S^{m-1}_{(\varepsilon_i)}} \\
&\le \int_{\varepsilon_i}^1 r^{-(m-1)}dr \int_{S^{m-1}}\int_{\varepsilon_i}^1 |\frac{\partial}{\partial r}(\chi f)(r,\theta)|^2 r^{(m-1)} dr d\mu_{S^{m-1}_{(\varepsilon_i)}} \\
&= {\varepsilon_i}^{m-1}\int_{\varepsilon_i}^1 r^{-(m-1)}dr \sum_{x=P,Q}\int_{\substack{B(x,1)\\ -B(x,\varepsilon_i)}} |\frac{\partial}{\partial r}(\chi f)|^2 d\mu_g \\
&\le C(\chi){\varepsilon_i}^{m-1}\int_{\varepsilon_i}^1 r^{-(m-1)}dr \sum_{x=P,Q}\int_{\substack{B(x,1)\\ -B(x,\varepsilon_i)}} \{|f|^2 + |\frac{\partial f}{\partial r}|^2\} d\mu_g \\
&\le C(\chi){\varepsilon_i}^{m-1}\int_{\varepsilon_i}^1 r^{-(m-1)}dr \sum_{x=P,Q}\int_{\substack{B(x,1)\\ -B(x,\varepsilon_i)}} \{|f|^2 + |df|^2_g\} d\mu_g \\
&\qquad (|df|^2_g = |f'dr|^2_g + |d_{S^{m-1}}f|^2_g \ge |f'dr|^2_g \text{ による}) \\
&\le C(\chi){\varepsilon_i}^{m-1}\int_{\varepsilon_i}^1 r^{-(m-1)}dr \|f\|^2_{H^1(M_{\varepsilon_i})}
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
{\varepsilon_i}^{m-1}\int_{\varepsilon_i}^1 r^{-(m-1)}dr \quad \le \quad \begin{cases} C\,\varepsilon_i\,|\log\varepsilon_i| & (m=2), \\ C\varepsilon_i & (m \ge 3). \end{cases}
$$

に注意すれば，評価を得る． □

さて，(2.3.2) より $\|f^1_{j,\varepsilon_i}\|_{H^1(M_{\varepsilon_i},g)}$ は一様有界なので，今の Lemma 2.3.2 より $\|\tilde{f}^2_{j,\varepsilon_i}\restriction_{\partial M_2(1)}\|_{L^2(\partial M_2(1),\partial g_2)} \to 0 \quad (i\to\infty)$ を得る．そこで，trace 作用素の連続性より，$\tilde{f}^2_j\restriction_{\partial C_1} = 0$ である．

この s のみの関数 $\tilde{f}^2_j$ が $[0,L]$ の固有関数（または，0）であることが前と同様の議論から分かる．すなわち，すべての support がコンパクトな C^∞ 関数 $\varphi \in C^\infty_0(0,L)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
q_{[0,L]}(\tilde{f}^2_j,\varphi) &= \mathrm{vol}(S^{m-1}_{(1)})^{-1} q_{C_1}(\tilde{f}^2_j,\varphi) \\
&= \mathrm{vol}(S^{m-1}_{(1)})^{-1} \lim_{i\to\infty} q_{C_1}(\tilde{f}^2_{j,\varepsilon_i},\varphi) \\
&= \mathrm{vol}(S^{m-1}_{(1)})^{-1} \lim_{i\to\infty} {\varepsilon_i}^{-\frac{m-1}{2}} q_{C_{\varepsilon_i}}(f^2_{j,\varepsilon_i},\varphi) \\
&\qquad (d_V\,\varphi = 0 \text{ に注意}) \\
&= \mathrm{vol}(S^{m-1}_{(1)})^{-1} \lim_{i\to\infty} {\varepsilon_i}^{-\frac{m-1}{2}} \{q_{M_{\varepsilon_i}}(f^1_{j,\varepsilon_i},0) + q_{C_{\varepsilon_i}}(f^2_{j,\varepsilon_i},\varphi)\} \\
&= \mathrm{vol}(S^{m-1}_{(1)})^{-1} \lim_{i\to\infty} {\varepsilon_i}^{-\frac{m-1}{2}} q_{\varepsilon_i}(f_{j,\varepsilon_i},(0,\varphi)) \\
&= \mathrm{vol}(S^{m-1}_{(1)})^{-1} \lim_{i\to\infty} {\varepsilon_i}^{-\frac{m-1}{2}} \lambda_j(\tilde{M}_{\varepsilon_i})(f^2_{j,\varepsilon_i},\varphi)_{L^2(C_{\varepsilon_i})} \\
&\qquad (f_{j,\varepsilon_i} \text{ は固有関数より}) \\
&= \alpha_j\,\mathrm{vol}(S^{m-1}_{(1)})^{-1} \lim_{i\to\infty} (\tilde{f}^2_{j,\varepsilon_i},\varphi)_{L^2(C_1)} \\
&= \alpha_j\,(\tilde{f}^2_j,\varphi)_{L^2(0,L)}.
\end{aligned}
$$

が成立する．よって，埋め込み $C_0^\infty(0,L) \subset H_0^1(0,L)$ は dense なので，すべての $\varphi \in H_0^1(0,L)$ に対して，$q_{[0,L]}(\tilde{f}_j^2, \varphi) = \alpha_j(\tilde{f}_j^2, \varphi)_{L^2(0,L)}$ が成立する．弱解の正則性定理から，$\tilde{f}_j^2 \in C_0^\infty(0,L)$ であり $\Delta_{[0,L]}\tilde{f}_j^2 = \alpha_j \tilde{f}_j^2$ が成立する．

最後に，今得られた極限関数のペア

$$\{F_1 := (\bar{f}_1^1, \sqrt{\mathrm{vol}(S_{(1)}^{m-1})}\tilde{f}_1^2 \equiv 0), \ldots, F_k := (\bar{f}_k^1, \sqrt{\mathrm{vol}(S_{(1)}^{m-1})}\tilde{f}_k^2)\}$$

が L^2 -正規直交であることを示せばよい．まず，

$$\begin{aligned}
\|\bar{f}_{j,\varepsilon_i}^1\|_{L^2(B(P,\varepsilon_i)\cup B(Q,\varepsilon_i))} &\le \|\bar{f}_{j,\varepsilon_i}^1 - \bar{f}_j^1\|_{L^2(B(P,\varepsilon_i)\cup B(Q,\varepsilon_i))} + \|\bar{f}_j^1\|_{L^2(B(P,\varepsilon_i)\cup B(Q,\varepsilon_i))} \\
&\le \|\bar{f}_{j,\varepsilon_i}^1 - \bar{f}_j^1\|_{L^2(M)} + 2\|\bar{f}_j^1\|_{C^0(M)} \mathrm{vol}(B(P,\varepsilon_i)) \\
&\to 0 \quad (\varepsilon_i \to 0)
\end{aligned}$$

に注意しよう．これより，

$$\begin{aligned}
(F_j, F_l)_{L^2} &= (\bar{f}_j^1, \bar{f}_l^1)_{L^2(M,g)} + \mathrm{vol}(S_{(1)}^{m-1})(\tilde{f}_j^2, \tilde{f}_l^2)_{L^2(0,L)} \\
&= \lim_{i\to\infty}\{(f_{j,\varepsilon_i}^1, f_{l,\varepsilon_i}^1)_{L^2(M_{\varepsilon_i})} + (\bar{f}_{j,\varepsilon_i}^1, \bar{f}_{l,\varepsilon_i}^1)_{L^2(B(P,\varepsilon_i)\cup B(Q,\varepsilon_i))}\} + (\tilde{f}_j^2, \tilde{f}_l^2)_{L^2(C_1)} \\
&= \lim_{i\to\infty}\{(f_{j,\varepsilon_i}^1, f_{l,\varepsilon_i}^1)_{L^2(M_{\varepsilon_i})} + (f_{j,\varepsilon_i}^2, f_{l,\varepsilon_i}^2)_{L^2(C_{\varepsilon_i})}\} \\
&= \lim_{i\to\infty}(f_{j,\varepsilon_i}, f_{l,\varepsilon_i})_{L^2(\tilde{M}_{\varepsilon_i})} \\
&= \delta_{jl}
\end{aligned}$$

が分かる．

以上より，関数の場合の固有値の収束定理の証明がすべて完了した． □

3 微分形式の場合

この章では，本論の微分形式の場合の証明に入る．始めに，3.1 で微分形式に作用する Laplacian の固有値の基本的な事柄を固有値の duality を中心に復習する．次の 3.2 では関数の場合と同様に $\tilde{M}_\varepsilon$ 上の関数空間と Laplacian の定義を行う．3.3 では上からの固有値の評価を行う．3.4 では下からの評価のための準備を行う．そして，3.5 から 3.7 で下からの評価の証明を行う．これらは場合を分けて証明される．3.5 では $m \ge 5$ の場合，3.4 では $m = 4$ の場合，そして，最後の 3.7 では $m = 3$ の場合の証明を行う．なお，2 次元の場合には固有値の双対性から関数の固有値の収束結果からすべて従う．

3.1 微分形式の Laplacian の基本事項

この節では，微分形式の Laplacian の固有値に関する基本事項をまとめる．

(M^m, g) を m 次元の連結，向き付けられた，閉 Riemann 多様体とする．このとき，良く知られているように Hodge の分解定理が成立する：

$$\Omega^p(M) = \mathbf{H}^p(M; g) \oplus d\Omega^{p-1}(M) \oplus \delta\Omega^{p+1}(M),$$

ここに，$\Omega^p(M)$ は M 上の滑らかな p-form の空間，$\mathbf{H}^p(M; g)$ は (M, g) 上の harmonic p-form の空間である．Δ と d, δ がお互いに可換であることから，Laplacian を exact form の空間 $d\Omega^{p-1}(M)$ と co-exact form の空間 $\delta\Omega^{p+1}(M)$ に制限して考えることが出来る．そこで，それら制限された Laplacian の固有値を $\lambda_k'^{(p)}(M, g)$, $\lambda_k''^{(p)}(M, g)$ と書く．この固有値は常に正である．

今，p-form 上のすべての固有値の集合を $\mathrm{Spec}^{(p)}(M, g)$ と書く．ここで，固有値はその重複度の数だけ繰り返して書く．また，exaxt p-form 上の固有値の集合を $\mathrm{Spec}'^{(p)}(M, g)$，co-exaxt p-form 上の固有値の集合を $\mathrm{Spec}''^{(p)}(M, g)$ と書く．もちろん，

$$\mathrm{Spec}^{(p)}(M, g) = \{0, \cdots, 0\} \sqcup \mathrm{Spec}'^{(p)}(M, g) \sqcup \mathrm{Spec}''^{(p)}(M, g)$$

である．ここに，0 固有値は $b_p(M) = \dim H^p(M, \mathbb{R})$ （p 次 Betti 数）個である．

さて，$\lambda > 0$ に対し，

$$\begin{aligned} E^{(p)}(\lambda) &= \{\omega \in \Omega^p(M) | \Delta\omega = \lambda\omega\}, \\ E'^{(p)}(\lambda) &= \{\omega \in d\Omega^{p-1}(M) | \Delta\omega = \lambda\omega\}, \\ E''^{(p)}(\lambda) &= \{\omega \in \delta\Omega^{p+1}(M) | \Delta\omega = \lambda\omega\}, \end{aligned}$$

と置けば，

$$E^{(p)}(\lambda) = E'^{(p)}(\lambda) \oplus E''^{(p)}(\lambda)$$

である．さらに，d と δ は互いに固有空間の同型写像を与える：$E'^{(p)}(\lambda) \simeq E''^{(p-1)}(\lambda)$. 具体的には，$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}d$ と $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\delta$ が互いに逆作用素の関係にある．とくに，それぞれの第 i 固有値に関して，次の Lemma が成立する．

Lemma 3.1.1. すべての $1 \le p \le m$ と $i \ge 1$ に対して，

$$\lambda_i'^{(p)}(M, g) = \lambda_i''^{(p-1)}(M, g). \tag{3.1.1}$$

よって，$\mathrm{Spec}'^{(p)}(M, g) = \mathrm{Spec}''^{(p-1)}(M, g)$ が成立する．

さらに，向き付け可能性より，Hodge star operator $*$ が定義できる．そして，$*$ も Laplacian と可換なことから，$*$ が次の同型写像を引き起こす：$E'^{(p)}(\lambda) \simeq E''^{(m-p)}(\lambda)$. 特に，Hodge duality と呼ばれる次の Lemma が成立する．

Lemma 3.1.2 (Hodge duality). すべての $1 \le p \le m$ と $i \ge 1$ に対して，

$$\lambda_i'^{(p)}(M, g) = \lambda_i''^{(m-p)}(M, g). \tag{3.1.2}$$

よって，$\mathrm{Spec}'^{(p)}(M, g) = \mathrm{Spec}''^{(m-p)}(M, g)$ が成立する．

これは，0 固有値に対しても有効である．すなわち，p-form 上の 0 固有値を含むすべての固有値は，$(m-p)$-form 上のすべての固有値と重複度まで込めてすべて一致する．この事実も，Poincaré duality あるいは，Hodge duality と呼ばれている．ゆえに，固有値を調べる場合は，$0 \le p \le \frac{m}{2}$ と半分の次数までの form について調べれば十分である．

さらに，2 次元の場合，上の 2 つの Lemma 3.1.1 と 3.1.2 から，すべての次数の正の固有値は，関数の固有値に一致する．正確には次が成立する．

Proposition 3.1.3. *Let* (M,g) を 2 次元の連結，向き付けられた，閉 *Riemann* 多様体とする．このとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}^{(2)}(M,g) &= \mathrm{Spec}^{(0)}(M,g) \text{（0 固有値も含めて）},\\ \mathrm{Spec}^{(1)}(M,g) &= \{0,\cdots,0\} \sqcup \mathrm{Spec}^{(0)}(M,g)\setminus\{0\} \sqcup \mathrm{Spec}^{(0)}(M,g)\setminus\{0\}.\end{aligned}$$

ここに，1-*form* における 0 固有値の数は，$b_1(M)$ 個である．

Proof. 最初の式は Lemma 3.1.2 に他ならない．次に 1-form に対しては，$\mathrm{Spec}'^{(1)}(M,g) = \mathrm{Spec}''^{(0)}(M,g) = \mathrm{Spec}^{(0)}(M,g)\setminus\{0\}$ と，$\mathrm{Spec}''^{(1)}(M,g) = \mathrm{Spec}'^{(2)}(M,g) = \mathrm{Spec}''^{(0)}(M,g) = Spec^{(0)}(M,g)\setminus\{0\}$ から従う． □

この定理より，2 次元の場合の固有値の収束は，すべて関数の場合に帰着される（ 1-form の 0 固有値はコホモロジーから分かる）．よって，微分形式の固有値の収束の議論においては 3 次元以上の場合について考察すればよい．

次に，境界付き多様体の場合を復習しよう．(M^m,g) を m 次元の連結，向き付けられた，コンパクトの境界付き Riemann 多様体とする．この上でスペクトル幾何学を実行するには，適切な境界条件を設定しなくてはならない．関数の場合には，Dirichlet 条件と Neumann 条件の 2 種類が良く知られている．微分形式の場合にも Dirichlet 条件と Neumann 条件それぞれに対応した境界条件が Ray-Singer [RS-71] によって導入され，relative boundary condition と absolute boundary condition と呼ばれている．M 上の p-form φ と境界上の各点 $x \in \partial M$ に対し，$\varphi_x \in \Lambda^p T_x^* M$ の境界に接する空間への射影を $\mathbf{t}$，その g に関する直交補空間への射影を $\mathbf{n}$ と書く．記号の意味は，tangential と normal の頭文字である．我々は分解

$$\varphi_x = \mathbf{t}(\varphi_x) + \mathbf{n}(\varphi_x) \quad \text{for } x \in \partial M.$$

を得ている．この準備の下に境界条件は次のように定義される．

Definition 3.1.4 ([RS-71], Def.3.2.). (M,g) 上の p-*form* φ が *relative boundary condition* を満たすとは，

$$\mathbf{t}(\varphi) = 0, \quad \mathbf{t}(\delta\varphi) = 0 \quad \textit{at } \partial M$$

であり，*absolute boundary condition* を満たすとは，

$$\mathbf{n}(\varphi) = 0, \quad \mathbf{n}(d\varphi) = 0 \quad \textit{at } \partial M$$

である．

まず，$p=0$ すなわち関数の場合，これらの条件が Dirichlet 条件と Neumann 条件になることに注意しよう．

これらの境界条件の下では d と δ は互いに共役である．それは，境界条件から Stokes の定理における境界の積分の項が消えるからである．これより，Laplacian は自己共役であり，そのスペクトルは境界の無い場合と同じく重複度が有限の固有値のみからなる．その固有値を，
relative consition の場合

$$0 \le \mu_1^{(p)}(M,g) \le \mu_2^{(p)}(M,g) \le \cdots \le \mu_k^{(p)}(M,g) \le \cdots,$$

absolulte condition の場合

$$0 \le \nu_1^{(p)}(M,g) \le \nu_2^{(p)}(M,g) \le \cdots \le \nu_k^{(p)}(M,g) \le \cdots,$$

と書く．これらの固有値の間にも双対性が成立する．まず，境界条件が $*$ operator に関して双対性を満たす．すなわち，φ が relative (resp. absolute) condition を満たす時，$*\varphi$ は absolute (resp. relative) condition を満たすことが分かる．とくに，

Lemma 3.1.5 (Hodge duality)**.** 任意の p と k に対して，$\mu_k^{(p)}(M,g) = \nu_k^{(m-p)}(M,g)$.

ここで，Theorem A に出てきた区間 $[0,L]$ における relative condition の場合を見てみよう．$p=0$ の時は Dirichlet condition，$p=1$ の時は境界条件の双対性より Neumann 条件の固有値となることが分かる．

さて，境界付きの場合でも Hodge の分解定理が成立する．

Proposition 3.1.6 (Hodge-Morrey 分解 [Mo-66], [Sc-95])**.** 境界付き多様体 (M,g) 上の *p-form* は以下のように分解できる．

$$\Omega^p(M) = \mathcal{H}^p(M;g) \oplus \{d\varphi \mid \mathbf{t}(\varphi)=0\} \oplus \{\delta\psi \mid \mathbf{n}(\psi)=0\}.$$

ただし，$\mathcal{H}^p(M;g) := \{\omega |\ d\omega = 0,\ \delta\omega = 0\}$ は *harmonic field* の空間と呼ばれている．境界条件を課していないため，一般には *harmonic field* と *harmonic form* は一致しない．なお，*harmonic field* は以下のように分解される（*Friedrichs* 分解）．

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^p(M;g) &= \mathbf{H}^p_{rel}(M;g) \oplus \{\delta\,\Omega^{p+1} \cap \mathcal{H}^p(M;g)\} \\ &= \mathbf{H}^p_{ab}\,(M;g) \oplus \{d\Omega^{p-1} \cap \mathcal{H}^p(M;g)\}. \end{aligned}$$

ここに，$\mathbf{H}^p_{rel}(M;g)$ と $\mathbf{H}^p_{rel}(M;g)$ はそれぞれ，*relative* あるいは *absolute condition* を満たす *harmonic form* の空間である．

この分解定理から次の固有値の双対性が従う．

Lemma 3.1.7. すべての $0 \le p \le m-1$ と $k \ge 1$ に対して，

$$\mu_k''^{(p)}(M,g) = \nu_k'^{(p+1)}(M,g).$$

ここに，境界の無い場合と同様に $'$ で *exact* を，$''$ で *co-exact* の固有値を表わす．

最後に de Rham - Hodge - Kodaira の定理を述べてこの節を終わる．この定理から，relative と absolute という境界条件の名前の由来が分かる．

Proposition 3.1.8 (de Rham-Hodge-Kodaira). (M, g) を連結，向き付けられた，コンパクトな境界付き *Riemann* 多様体とすると，各 $0 \le p \le m$ に対して，次の同型が成立する．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}^p_{ab}(M, g) &\cong H^p(M; \mathbb{R}), \\
\mathbf{H}^p_{rel}(M, g) &\cong H^p(M, \partial M; \mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

すなわち，*absolute condition* を満たす *harmonic form* の空間は，絶対コホモロジーと，*relative condition* を満たす *harmonic form* の空間は相対コホモロジーと同型である．

3.2 微分形式の Sobolev 空間と Laplacian

この節では，関数の場合に行った関数空間の設定と Laplacian の定義を，微分形式の場合について行う．微分形式の場合も基本的な考え方は関数の場合と同様であるが，境界値の扱いが多少複雑である．

始めに，$\tilde{M}_\varepsilon$ 上の L^2 p-form の空間を関数の場合と同様に M_ε と C_ε それぞれの L^2 空間の直積として定める．

Definition 3.2.1.

$$
L^2(\Lambda^p \tilde{M}_\varepsilon) \ := \ L^2(\Lambda^p M_\varepsilon) \times L^2(\Lambda^p C_\varepsilon).
$$

次に，Sobolev 空間 $H^1(\Lambda^p \tilde{M}_\varepsilon)$ を定義するためには，M_ε と C_ε の境界における貼り付け条件が必要である．我々はそれを trace 作用素の意味でとる．

Definition 3.2.2 ([AC-95], Def.1.1).

$$
\begin{aligned}
H^1(\Lambda^p \tilde{M}_\varepsilon) \ := \ \{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in H^1(\Lambda^p M_\varepsilon) \times H^1(\Lambda^p C_\varepsilon) \,|\, \\
\varphi_i = \alpha_i + dr_i \wedge \beta_i \ (i = 1, 2) \text{ と局所表示に対して} \\
\alpha_1 = \alpha_2,\ \beta_1 = -\,\beta_2 \ \ in\ L^2(\Lambda^* M_\varepsilon) \restriction_{\partial M_\varepsilon}\}.
\end{aligned}
$$

以下，H^1 form の貼り合せの条件 $\alpha_1 = \alpha_2,\ \beta_1 = -\,\beta_2$ を貼り付け条件を呼ぶことにする．もちろん，今定義した空間 L^2 あるいは H^1 の内積は，各々の成分の直和内積を採用する．以上のことは関数の場合と同様である．

Sobolev 空間 H^1 が定義されたので，外微分 d と余微分 δ が自然に定義される．

Definition 3.2.3. すべての $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in H^1(\Lambda^p \tilde{M}_\varepsilon)$ に対して，外微分 d と余微分 δ_ε を次で定義する：

$$
d(\varphi_1, \varphi_2) := (d\varphi_1, d\varphi_2), \qquad \delta_\varepsilon(\varphi_1, \varphi_2) := (\delta_{M_\varepsilon}\varphi_1, \delta_{C_\varepsilon}\varphi_2),
$$

ここに，δ_M は *Riemann* 多様体 M による余微分を表わす．

このとき，これらはお互いに adjoint の関係にある．

Lemma 3.2.4. $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ と $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in H^1(\Lambda^* \tilde{M}_\varepsilon)$ に対して，

$$(d\varphi, \psi)_{L^2(\Lambda^{p+1}\,\tilde{M}_\varepsilon)} = (\varphi, \delta_\varepsilon \psi)_{L^2(\Lambda^p\,\tilde{M}_\varepsilon)}$$

が成立する．

Proof. まず，各成分 M_ε と C_ε で Green の公式を実行する．すると，それぞれの境界での積分の項が貼り付け条件によりキャンセルされることから従う． □

Proposition 3.2.5 ([AC-95], Prop.1.2.)**.** *$H^1(\Lambda^*\,\tilde{M}_\varepsilon)$ 上の作用素 $D_\varepsilon := d + \delta_\varepsilon$ は自己共役な楕円型作用素で，その像は閉部分空間である．これより，D_ε は Fredholm 作用素であり，Hodge の分解定理が成立する．*

この証明は省略する．原論文では一般的な状況の下で証明している．
次に H^2 空間を定義する．

Definition 3.2.6 ([AC-95], Def.1.4.)**.** $\tilde{M}_\varepsilon$ 上の *Laplacian* を $\Delta_\varepsilon := D_\varepsilon^2$ として定義する．同じことだが，2 次形式 $q(\varphi) := \int_{\tilde{M}_\varepsilon} |D_\varepsilon\,\varphi|^2 d\mu$ の *polarization operator* である．そして，*Laplacian* の定義域は，各 p に対し

$$H^2(\Lambda^p\,\tilde{M}_\varepsilon) := \{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in H^2(\Lambda^p\,M_\varepsilon) \times H^2(\Lambda^p\,C_\varepsilon) \mid \varphi,\ d\varphi,\ \delta_\varepsilon\varphi \in H^1(\Lambda^*\,\tilde{M}_\varepsilon)\}$$

と定める．

最後に，Laplacian に適した q-ノムルを導入してこの節を終わる．

Definition 3.2.7 ([AC-95], Def.1.4.)**.** $H^1(\Lambda^p\,\tilde{M}_\varepsilon)$ 上に 2 次形式から定義される q-ノルムを導入する．$\varphi \in H^1(\Lambda^p\,\tilde{M}_\varepsilon)$ に対して，

$$\|\,\varphi\,\|_q^2 := \|\,\varphi\,\|_{L^2}^2 + q(\varphi)$$

と定める．

関数の場合は H^1-ノルムと q-ノルムは一致するが，微分形式の場合は一般に Weitzenbeck formula に表れる曲率の部分がずれる．なお，閉多様体の場合は両者は同値なノルムを定める．

3.3 微分形式の固有値の上からの評価

この節では次の Proposition 3.3.1 の証明を min-max 原理を用いて示す．

Proposition 3.3.1 (上からの評価)**.**

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \lambda_k^{(p)}(\tilde{M}_\varepsilon) \le \mu_k^{(p)}.$$

Proof. 始めに，$2 \le p \le m-2$ の時を考える．この時は，関数の場合と同様に (M,g) の固有形式を cut-off して test forms を構成して min-max 原理を適用すればよい．計算の仕組みは関数の場合の Proposition 2.2.1 と全く同じである．

そこで，以下 $p=1$ の場合を考察する．この時は，固有値に C_ε の寄与が表れる．その部分を次で評価する．手法はやはり min-max 原理を使うが，ややテクニカルである．

まず，φ_i $(i=1,2,\ldots,)$ を M 上の固有値 $\lambda_i^{(1)}(M)$ に対応する eigen 1-form で，互いに L^2 内積に関して正規直交となるものとする． cut-off function χ_ε を

$$\chi_\varepsilon(r) := \begin{cases} 0 & (0 \le r \le \varepsilon), \\ 1 & (r=1). \end{cases}$$

で定める．ただし，r は P あるいは $Q \in M$ からの距離である．

次に，$f_j(s)ds$ $(j=1,2,\ldots)$ をハンドルの極限 $[0,L]$ 上の relative boundary condition を満たす eigen 1-form で，L^2 正規直交的に取る．すなわち，$f_j(s)$ は Neumann 条件 $f_j'(0)=f_j'(L)=0$ を満たす eigen function である．さて，$\tilde{M}_\varepsilon$ 上の 1-form $\psi_{\varepsilon,j}$ を次で定める：

$$\psi_{\varepsilon,j} \;:=\; \begin{cases} \varepsilon^{-\frac{m-1}{2}} f_j(s)ds & \text{on } C_\varepsilon, \\ \varepsilon^{\frac{m-1}{2}}\rho_\varepsilon(r) f_j(0)dr & \text{on } B(P,1)-B(P,\varepsilon), \\ -\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}\rho_\varepsilon(r) f_j(L)dr & \text{on } B(Q,1)-B(Q,\varepsilon), \\ \quad 0 & \text{on } M_\varepsilon - \{B(P,1)\cup B(Q,1)\}. \end{cases} \tag{3.3.1}$$

ただし，$\rho_\varepsilon(r)$ は

$$\rho_\varepsilon(r) \;:=\; \begin{cases} r^{-(m-1)} & (\varepsilon \le r \le 1/2), \\ 0 & (r=1) \end{cases}$$

となる cut-off function である．ここで，$\varepsilon \le r \le 1/2$ に対して，$(r^{(m-1)}\rho(r))' \equiv 0$ であることに注意しよう．この時，$\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}\rho_\varepsilon(\varepsilon) = \varepsilon^{-\frac{m-1}{2}}$ なので，$\psi_{\varepsilon,j}$ は貼り付け条件を満たす．よって，$\psi_{\varepsilon,j} \in H^1(\Lambda^p \tilde{M}_\varepsilon)$ であり，min-max 原理の test form として適用できる．

ところで，[AC-95] の original の証明における test 1-form は貼り付け条件を満たしていないので，相応しくないような気がする．ここでは cut-off function ρ_ε を上述のように取ることで証明できる．

この時，E_ε を $\{\chi_\varepsilon\varphi_1, \chi_\varepsilon\varphi_2, \ldots, \psi_{\varepsilon,1}, \psi_{\varepsilon,2}, \ldots\}$ によって生成される部分空間とする．ただし，$\chi_\varepsilon\varphi_i$ と $\psi_{\varepsilon,j}$ は $\mu_1^{(1)} \le \cdots \le \mu_k^{(1)}$ に現れる M, $[0,L]$ の固有値に対応して取ってくる．すると，この E_ε は $H^1(\Lambda^1 \tilde{M}_\varepsilon)$ の k 次元部分空間になるので，min-max 原理から，

$$\lambda_k^{(1)}(\tilde{M}_\varepsilon) \le \sup_{u_\varepsilon \ne 0 \in E_\varepsilon} \left\{ \frac{q_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon)}{\|u_\varepsilon\|^2_{L^2(\tilde{M}_\varepsilon)}} \right\} \tag{3.3.2}$$

が成立する．

右辺を評価しよう．始めに u_ε が $\chi_\varepsilon\varphi_i$ の場合は関数の場合と同様に，右辺は

$$\lambda_i^{(1)}(M)+\delta(\varepsilon)$$

という形で評価できる．ただし，$\delta(\varepsilon)$ は $\varepsilon\to 0$ の時 $\to 0$ となる項である．

次に u_ε に $\psi_{\varepsilon,j}$ が現れる場合を考察する．まず，$B(P,1)-B(P,\varepsilon)$ 上の計算をする．もちろん，Q の近傍の場合も同様である．

$$d(\rho_\varepsilon(r)dr) \ \equiv \ 0, \quad \delta(\rho_\varepsilon(r)dr)=-(\rho_\varepsilon'+\frac{m-1}{r}\rho_\varepsilon). \tag{3.3.3}$$

よって，任意の $u\in H^1(\Lambda^1\tilde{M}_\varepsilon)$ に対して，

$$\begin{aligned} q_\varepsilon(\psi_{\varepsilon,j},u)\restriction_{B(P,1)\setminus B(P,\varepsilon)} &= (\delta\,\psi_\varepsilon,\delta\,u)_{L^2(B(P,1)-B(P,\varepsilon))} \\ &= \varepsilon^{\frac{m-1}{2}}f_j(0)^2\int_\varepsilon^1\int_{S^{m-1}(1)}(\rho_\varepsilon'+\frac{m-1}{r}\rho_\varepsilon)\,\delta\,u\,r^{m-1}\ drd\mu_{S^{m-1}} \\ &= C\,\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}\int_\varepsilon^1(r^{m-1}\rho_\varepsilon)'\int_{S^{m-1}_{(1)}}\delta\,u\ drd\mu_{S^{m-1}} \\ &= C\,\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}\int_{1/2}^1(r^{m-1}\rho_\varepsilon)'\{\int_{S^{m-1}_{(1)}}\delta\,u\ d\mu_{S^{m-1}}\}dr, \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

であり，また，

$$(\psi_{\varepsilon,j},u)_{L^2(\Lambda^1(B(P,1)\setminus B(P,\varepsilon))} \ = \ \varepsilon^{\frac{m-1}{2}}f_j(0)\int_\varepsilon^1\int_{S^{m-1}_{(1)}}\langle dr,u\rangle\,\rho_\varepsilon r^{m-1}\ drd\mu_{S^{m-1}} \tag{3.3.5}$$

次に，ハンドル C_ε 上の計算を行う．$d(f(s)ds)\equiv 0$ かつ $\delta(f(s)ds)=f'(s)$ なので，

$$\begin{aligned} q_\varepsilon(\psi_{\varepsilon,j},u)\restriction_{C_\varepsilon} &= (\delta\,\psi_{\varepsilon,j},\delta\,u)_{L^2(C_\varepsilon)} \\ &= \varepsilon^{-\frac{m-1}{2}}\int_0^L\int_{S^{m-1}_{(1)}}f_j'(s)\,\delta\,u\ \varepsilon^{m-1}\ dsd\mu_{S^{m-1}} \\ &= \varepsilon^{\frac{m-1}{2}}\int_0^L f_j'(s)\{\int_{S^{m-1}_{(1)}}\delta\,ud\mu_{S^{m-1}}\}ds, \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

であり，また，

$$\begin{aligned} (\psi_{\varepsilon,j},u)_{L^2(\Lambda^1 C_\varepsilon)} &= \varepsilon^{-\frac{m-1}{2}}\int_0^L\int_{S^{m-1}_{(1)}}\langle f_j(s)ds,u\rangle\ \varepsilon^{m-1}\,dsd\mu_{S^{m-1}} \\ &= \varepsilon^{\frac{m-1}{2}}\int_0^L f_j(s)\{\int_{S^{m-1}(1)}\langle ds,u\rangle d\mu_{S^{m-1}}\}ds. \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

以上の計算から，右辺は

$$\mu_j^{(1)}([0,L])+\delta(\varepsilon)$$

という形で評価できる．ただし，$\delta(\varepsilon)$ は $\varepsilon\to 0$ の時 $\to 0$ となる項である． □

3.4 下からの評価のための準備

固有値 $\lambda_k^{(p)}(\tilde{M}_\varepsilon)$ の下からの評価を得れば，Theorem 1.1.1 の証明はすべて完結するのだが，この節ではその証明のための準備を行う．

以下の解析のため Hilbert 空間をパラメーター ε に依らずに固定して考えたい．そこで，次の等長写像を導入する（[AC-95] (3.1)）．$C_\varepsilon = [0, L] \times S^{m-1}_{(\varepsilon)}$ であり，$C_1 = [0, L] \times S^{m-1}_{(1)}$ と置く．

Definition 3.4.1 (スケール変換)**.** スケール変換 h_ε を以下で定める．

$$\begin{aligned} h_\varepsilon : L^2(\Lambda^p\, C_\varepsilon) \quad &\longrightarrow \quad L^2(\Lambda^p\, C_1) \\ \alpha + ds \wedge \beta \quad &\mapsto \quad \varepsilon^{\frac{m-1}{2}-p}\,\alpha + \varepsilon^{\frac{m+1}{2}-p} ds \wedge \beta \end{aligned}$$

この時，h_ε は *Hilbert* 空間の間の等長作用素となる．

H^1 空間の貼り付け条件を h_ε で写した場合を考える．

Definition 3.4.2 (貼り付け条件，[AC-95] (3.2))**.**

$(\varphi_1, h_\varepsilon^{-1}(\varphi_2)) \in H^1(\Lambda^p\, \tilde{M}_\varepsilon) \qquad \Longleftrightarrow$

$(\varphi_1, \varphi_2) \in H^1(\Lambda^p\, M_\varepsilon) \times H^1(\Lambda^p\, C_1)$ で $\varphi_1 = \alpha_1 + dr \wedge \beta_1, \varphi_2 = \alpha_2 + ds \wedge \beta_2$ と書くとき，

P の近傍において，

$$\begin{cases} \alpha_1(\varepsilon, \theta) = \quad \varepsilon^{-(\frac{m-1}{2}-p)}\,\alpha_2(0, \theta), \\ \beta_1(\varepsilon, \theta) = -\,\varepsilon^{-(\frac{m+1}{2}-p)}\,\beta_2(0, \theta), \end{cases} \tag{3.4.1}$$

Q の近傍において，

$$\begin{cases} \alpha_1(\varepsilon, \theta) = \quad \varepsilon^{-(\frac{m-1}{2}-p)}\,\alpha_2(L, \theta), \\ \beta_1(\varepsilon, \theta) = \quad \varepsilon^{-(\frac{m+1}{2}-p)}\,\beta_2(L, \theta). \end{cases} \tag{3.4.2}$$

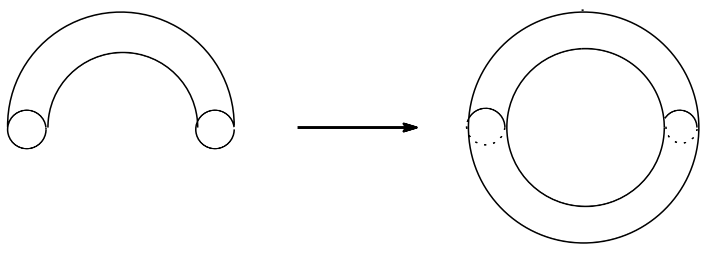

図 3: ハンドルのダブル化

ハンドル C_1 のダブル (symmetric double) $T_1 := S^1_{(L/\pi)} \times S^{m-1}_{(1)}$ を取ることにより，境界のないコンパクトな多様体としてハンドルを扱う．境界のない多様体にするこ

とで，例えば，H^1-ノルムと q-ノムルは同値になり，また，境界値の問題が無くなる等の利点がある．

form $\varphi_2 \in H^1(\Lambda^p C_1)$ を T_1 上の form へ対称的に拡張する（(3.3) in [AC-95]）．すなわち，

$$\varphi_2^{sym}(s,\theta) \;:=\; \begin{cases} \alpha_2(s,\theta) + ds \wedge \beta_2(s,\theta)\ (0 \le s \le L), \\ \alpha_2(2L-s,\theta) + ds \wedge \beta_2(2L-s,\theta)\ (L \le s \le 2L). \end{cases} \tag{3.4.3}$$

こうして，φ_2 の対称化 $\varphi_2^s = \varphi_2^{sym} \in H^1(\Lambda^p T_1)$ が得られる．この対称化による像の空間を $H^1_{sym}(\Lambda^p T_1)$ と書く．

$$\begin{array}{ccc} sym : H^1(\Lambda^p C_1) & \longrightarrow & H^1_{sym}(\Lambda^p T_1) \subset H^1(\Lambda^p T_1) \\ \varphi_2 & \mapsto & \varphi_2^{sym} \end{array}$$

Proposition 3.4.3 ([AC-95] Prop.3.4.)**.** 任意の $\varphi_2 \in H^1(\Lambda^p C_1)$ に対して，

$$\begin{aligned} \|\varphi_2^s\|^2_{q_{T_1}} = 2\int_{C_1}\{|\alpha_2|^2 + |\beta_2|^2\}d\mu + 2\int_{C_1}\{&|d_0\,\alpha_2|^2 + |d_0\,\beta_2|^2 + |\delta_0\,\alpha_2|^2 + |\delta_0\,\beta_2|^2 \\ &+ |\alpha_2'|^2 + |\beta_2'|^2\}\,d\mu_{C_1}. \end{aligned}$$

ここに，d_0 と δ_0 は，それぞれ，$S^{m-1}(1)$ の外微分，余微分を表わし，$'$ は パラメーター s による微分を表わす．

Proof. 証明は単なる計算であるが，φ_2 の対称化 φ_2^s の作り方より，境界での積分がキャンセルする点に注意しよう．まず，

$$\begin{aligned} d\,\varphi_2 &= d_0\,\alpha_2 + ds \wedge (\alpha_2' - d_0\,\beta_2), \\ \delta\,\varphi_2 &= (\delta_0\,\alpha_2 - \beta_2') + ds \wedge \delta_0\,\beta_2 \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \|(d+\delta)\,\varphi_2^s\|^2_{L^2(\Lambda^* T_1)} &= \int_{T_1}\{|d_0\,\alpha_2^s|^2 + |(\alpha^s)_2' - d_0\,\beta_2^s|^2 + |\delta_0\,\alpha_2^s - (\beta_2^s)'|^2 + |\delta_0\,\beta_2^s|^2\}d\mu_{T_1} \\ &= 2\int_{C_1}\{|d_0\,\alpha_2|^2 + |\delta_0\,\alpha_2|^2 + |d_0\,\beta_2|^2 + |\delta_0\,\beta_2|^2 + |(\alpha_2)'|^2 + |(\beta_2)'|^2\}d\mu_{C_1} \\ &\quad - 2\int_0^{2L}\{(\delta_0\,\alpha_2^s, (\beta_2)')_0 + ((\alpha_2^s)', d_0\,\beta_2^s)_0\}ds. \end{aligned}$$

ここで，第 2 項は，

$$\begin{aligned} \int_0^{2L}\{(\delta_0\,\alpha_2^s, (\beta_2^s)')_0 + ((\alpha_2^s)', d_0\,\beta_2^s)_0\}ds &= \int_0^{2L}(\alpha_2^s, d_0\,\beta_2^s)_0' ds \\ &= \int_0^{L}(\alpha_2, d_0\,\beta_2)_0' ds + \int_L^{2L}\{(\alpha_2, d_0\,\beta_2)_0(2L-s)\}' ds \\ &= [(\alpha_2, d_0\,\beta_2)_0]_0^L + [(\alpha_2, d_0\,\beta_2)_0]_L^0 = 0. \end{aligned}$$

よって，Proposition が証明できた． □

q の定義域も C_ε から T_1 上の空間へ持ち込む．

Definition 3.4.4 ([AC-95] (3.5)).

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(q_\varepsilon) \;\; := \;\; & \{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in H^1(\Lambda^p M_\varepsilon) \oplus H^1_{sym}(\Lambda^p T_1) \mid \\ & (\varphi_1, \varphi_2 \restriction_{C_1}) \text{ が } \textit{Definition 3.4.2} \text{ の貼り付け条件を満たす } \}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon : H^1(\Lambda^p \tilde{M}_\varepsilon) \;\; & \longrightarrow \;\; \mathrm{Dom}(q_\varepsilon) \\ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \;\; & \mapsto \;\; \Phi_\varepsilon(\varphi) := (\varphi_1, h_\varepsilon(\varphi_2)^s)\end{aligned}$$

とする．この時，$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathrm{Dom}(q_\varepsilon)$ に対して，2 次形式 q_ε を

$$q_\varepsilon(\varphi) \;\; := \;\; q(\Phi_\varepsilon^{-1}(\varphi)) = q(\varphi_1, h_\varepsilon^{-1}(\varphi_2 \restriction_{C_1}))$$

と定める．

次に，今定義した q_ε の P, Q の近傍での極座標による，局所表示について考えよう．χ を区分的に C^1 級で，次をみたす cut-off function とする．

$$\chi(r) \;\; := \;\; \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \le r \le \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{for } r = 0. \end{cases}$$

そして，χ を次のようにして，$\tilde{M}_\varepsilon$ 上の cut-off fuction とみなす．

$$\chi(x) \;\; := \;\; \begin{cases} \chi(d(P, x)) & \text{for } x \in B(P, 1), \\ \chi(d(Q, x)) & \text{for } x \in B(Q, 1), \\ \quad 1 & \text{for } x \in C_\varepsilon, \\ \quad 0 & \text{otherwise} . \end{cases} \tag{3.4.4}$$

この時，次の評価が成立する．

Lemma 3.4.5 ([AC-95] (3.6)). ある χ にのみ依存する定数 C_1, C_2 （ε に依らない）が存在し，任意の $\varphi \in \mathrm{Dom}(q_\varepsilon)$ に対して，

$$C_2 \| \varphi \|_{q_\varepsilon} \;\; \le \;\; \| \chi \varphi \|_{q_\varepsilon} + \| (1 - \chi) \varphi \|_{q_\varepsilon} \le C_1 \| \varphi \|_{q_\varepsilon} \tag{3.4.5}$$

H^1 ノルムに関しても同様の評価が成立する．

この証明は単なる計算なので省略する．

さて，q_ε の局所表示に入る．$B := \{x \in M_\varepsilon | d(x, p) \le 1,\ d(x, q) \le 1\} \cup C_1$ と置く．B 上の局所座標を，$B(P, 1)$ （あるいは，$B(Q, 1)$）上で極座標

$$(r, \theta) \in (0, 1) \times S^{m-1}$$

を，ハンドル C_1 上で直積座標

$$(s, \theta) \in [0, L] \times S^{m-1}$$

を導入する．そして，${}_0$ をもって $S^{m-1}_{(1)}$ の物を意味する．すなわち，d_0 と δ_0 を，それぞれ，$S^{m-1}_{(1)}$ の外微分，余微分とし，$\langle\ ,\ \rangle_0$ で $S^{m-1}_{(1)}$ の計量による内積，$(\ ,\ )_0$ で $S^{m-1}_{(1)}$ の L^2 内積を表わすことにする．なお，この記法は以下断り無く用いる．

Proposition 3.4.6 ([AC-95] Prop.3.7)**.** 任意の $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathrm{Dom}(q_\varepsilon) \subset H^1(\Lambda^p M_\varepsilon) \oplus H^1_{sym}(\Lambda^p T_1)$ かつ $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B$ に対して，$\varphi_1 = \alpha_1 + dr \wedge \beta_1$, $\varphi_2 \restriction_{C_1} = \alpha_2 + ds \wedge \beta_2$ と局所表示するとき，

$$\begin{aligned} q_\varepsilon(\varphi) &= \frac{1}{2} q_\varepsilon(\varphi_2) + \sum_{x=P,Q} \int_{\substack{B(x,1) \\ -B(x,\varepsilon)}} r^{m-2p-1} \Bigg\{ |\alpha_1'|_0^2 + \frac{1}{r^2}|d_0\alpha_1|_0^2 + \frac{1}{r^2}|\delta_0\alpha_1|_0^2 \\ &\quad + |d_0\beta_1|_0^2 + |\delta_0\beta_1|_0^2 - 4\langle \frac{\delta_0\alpha_1}{r}, \beta_1\rangle_0 \Bigg\} + r^{-(m-2p+1)} |(r^{m-2p+1}\beta_2)'|_0^2 \, dr d\mu_0 \end{aligned}$$

となる．ここに，

$$q_\varepsilon(\varphi_2) = \int_{C_1} \left\{ |\alpha_1'|_0^2 + |\,\beta_2'\,|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\{ |d_0\,\alpha_2\,|_0^2 + |\,\delta_0\,\alpha_2\,|_0^2 + |d_0\,\beta_2\,|_0^2 + |\,\delta_0\,\beta_2\,|_0^2 \} \right\} d\mu_{C_1}.$$

Proof. これも計算で分かる．まず，q_ε の定義から

$$q_\varepsilon(\varphi) = \int_{M_\varepsilon} \{ |d\,\varphi_1\,|^2 + |\,\delta\,\varphi_1\,|^2 \} d\mu_g + \int_{C_\varepsilon} \{ |dh_\varepsilon^{-1}(\varphi_2 \restriction_{C_1})|^2 + |\,\delta\, h_\varepsilon^{-1}(\varphi_2 \restriction_{C_1})|^2 \} d\mu_{C_\varepsilon}.$$

第 1 項を計算する．

$$\begin{aligned} d\,\varphi_1 &= d_0\,\alpha_1 + dr \wedge (\alpha_1' - d_0\,\beta_1), \\ \delta\,\varphi_1 &= -(\frac{m-2p+1}{r}\,\beta_1 + \beta_1') + \frac{1}{r^2}\,\delta_0\,\alpha_1 - \frac{1}{r^2} dr \wedge \delta_0\,\beta_1 \end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned} &\int_{M_\varepsilon} \{ |d\,\varphi_1\,|^2 + |\,\delta\,\varphi_1\,|^2 \} d\mu_g \\ &= \sum_{x=P,Q} \int_{\substack{B(x,1) \\ -B(x,\varepsilon)}} r^{m-2p-1} \{ |\alpha_1'|_0^2 + \frac{1}{r^2}(|d_0\,\alpha_1\,|_0^2 + |\,\delta_0\,\alpha_1\,|_0^2) + |d_0\,\beta_1\,|_0^2 + |\,\delta_0\,\beta_1\,|_0^2 \} \\ &+ r^{-(m-2p+1)} |(r^{m-2p+1}\,\beta_2)'|_0^2 - \frac{2}{r^2}\{ \langle \delta_0\,\alpha_1', r^{n-2p+1}\,\beta_1\rangle_0 + \langle \delta_0\,\alpha_1, (r^{m-2p+1}\,\beta_1)'\rangle_0 \} dr d\mu_0. \end{aligned}$$

最後の項は，部分積分を実行して，

$$\begin{aligned} -\int_{M_\varepsilon} & \frac{2}{r^2}\{ \langle \delta_0\,\alpha_1', r^{n-2p+1}\,\beta_1\rangle_0 + \langle \delta_0\,\alpha_1, (r^{m-2p+1}\,\beta_1)'\rangle_0 \} dr d\mu_0 \\ &= -\int_\varepsilon^1 \frac{2}{r^2} \{ (\delta_0\,\alpha_1, r^{n-2p+1}\,\beta_1)_0 \}' dr \\ &= -[\frac{2}{r^2}(\delta_0\,\alpha_1, r^{n-2p+1}\,\beta_1)_0]_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 \{\frac{2}{r^2}\}' (\delta_0\,\alpha_1, r^{n-2p+1}\,\beta_1)_0 dr \\ &= \frac{2}{\varepsilon^2}(\delta_0\,\alpha_1(\varepsilon), \varepsilon^{n-2p+1}\,\beta_1(\varepsilon))_0 - \int_\varepsilon^1 \frac{4}{r^3}(\delta_0\,\alpha_1, r^{n-2p+1}\,\beta_1)_0 dr. \end{aligned}$$

ここで，support の条件から $\beta_1(1) = 0$ に注意しよう．こうして，第 1 項は

$$\begin{aligned} &\int_{M_\varepsilon} \{ |d\,\varphi_1\,|^2 + |\,\delta\,\varphi_1\,|^2 \} d\mu_g \\ &= \sum_{x=P,Q} \int_{\substack{B(x,1) \\ -B(x,\varepsilon)}} r^{m-2p-1} \{ |\alpha_1'|_0^2 + \frac{1}{r^2}(|d_0\,\alpha_1\,|_0^2 + |\,\delta_0\,\alpha_1\,|_0^2) + |d_0\,\beta_1\,|_0^2 + |\,\delta_0\,\beta_1\,|_0^2 \\ &\qquad - 4\langle \frac{\delta_0\,\alpha_1}{r}, \beta_1\rangle_0 \} + r^{-(m-2p+1)} |(r^{m-2p+1}\,\beta_2)'|_0^2 \, dr d\mu_0 + 2\varepsilon^{n-2p-1}(\delta_0\,\alpha_1(\varepsilon), \beta_1(\varepsilon))_0. \end{aligned}$$

一方，第 2 項は Proposition 3.4.3 と同様の計算をする．

$$
\begin{aligned}
&\int_{C_\varepsilon}\{|dh_\varepsilon^{-1}(\varphi_2\restriction_{C_1})|^2+|\,\delta\, h_\varepsilon^{-1}(\varphi_2\restriction_{C_1})|^2\}d\mu_{C_\varepsilon}\\
&\quad=\int_{C_1}\{|(\alpha_2)'|^2+|(\beta_2)'|^2+\frac{1}{\varepsilon^2}(|d_0\,\alpha_2\,|^2+|\,\delta_0\,\alpha_2\,|^2+|d_0\,\beta_2\,|^2+|\,\delta_0\,\beta_2\,|^2)\}d\mu_{C_1}\\
&\qquad-\frac{2}{\varepsilon}\int_0^L\{(\delta_0\,\alpha_2,\beta_2)_0\}'ds\\
&\quad=\int_{C_1}\{|(\alpha_2)'|^2+|(\beta_2)'|^2+\frac{1}{\varepsilon^2}(|d_0\,\alpha_2\,|^2+|\,\delta_0\,\alpha_2\,|^2+|d_0\,\beta_2\,|^2+|\,\delta_0\,\beta_2\,|^2)\}d\mu_{C_1}+\\
&\qquad\frac{2}{\varepsilon}\{(\delta_0\,\alpha_2(0),\beta_2(0))_0-(\delta_0\,\alpha_2(L),\beta_2(L))_0\}
\end{aligned}
$$

以上を代入して，貼り付け条件 Definition 3.4.2 により，結果が従う． □

最後に定理の証明で重要な調和拡張の評価を述べる．

Proposition 3.4.7 ([AC-95] Prop.3.8, [AC-93] Prop.2.1). *regular domain* $U\subset\mathbb{R}^m$ に対して，

$$H^1_{tan}(\Lambda^p\,U):=\{\alpha\in H^1(\Lambda^p\,U)\mid i_{\partial_r}(\alpha)=0\ \mathit{for}\ r>0\},$$

すなわち， *pure tangential form* の空間とする．今，*harmonic extension operator* $P_\varepsilon\,:\,H^1_{tan}(\Lambda^p\,B(1)\setminus B(\varepsilon))\to H^1_{tan}(\Lambda^p\,B(1))$ としたとき，ある ε に依らない定数 $C>0$ が存在して次が成立する．

$p\neq m-1$ の時，$\alpha\in H^1_{tan}(\Lambda^p\,B(1)\setminus B(\varepsilon))$ に対して

$$\|P_\varepsilon(\alpha)\|_{H^1(B(1))}\leq C\|\,\alpha\,\|_{H^1B(1)\setminus B(\varepsilon)}$$

$p=m-1$ の時は，$\varepsilon<r<2\,\varepsilon$ に対して $\int_{S^{m-1}}\alpha=0$ となる $\alpha\in H^1_{tan}(\Lambda^p\,B(1)\setminus B(\varepsilon))$ に対して，

$$\|P_\varepsilon(\alpha)\|_{H^1(B(1))}\leq C\|\,\alpha\,\|_{H^1B(1)\setminus B(\varepsilon)}$$

が成立する．

なお，この結果に *Hodge star operator* $*$ を施せば，*pure normal forms* に対する *harmonic extension* の評価が得られる．この時，$p=1$ の時が特別になる．

この Proposition は下からの評価の証明の一つの key point だが，その証明は技巧的な評価に依る．ここでは割愛する．

3.5 固有値の下からの評価（$m\geq 5,\ 2\leq p\leq m-2$ の場合）

この節では，固有値の下からの評価を $m\geq 5$ かつ $2\leq p\leq m-2$ の場合に示す．なお，3.1 で述べた固有値の duality により，この結果と 2 章の関数の場合の結果から，$p=1,\ m-1$ の時の収束も従う．ただ，$p=1$ の場合は後の 3.7 節で直接証明することができる．

Proposition 3.5.1 (下からの評価). $m \geq 5$ かつ $2 \leq p \leq m-2$ において,

$$\mu_k^{(p)} \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \lambda_k^{(p)}(\tilde{M}_\varepsilon).$$

以下，この Proposition の証明を行う．証明のポイントは，関数の場合と同じく φ_1 から M への拡張の構成と，その H^1 ノルムの一様有界性を示すことである．しかし，微分形式の場合は拡張の一様有界性を示すのは，関数の場合に比べて格段に難しく大変技巧的である．

Lemma 3.5.2. 任意の $\varphi \in \mathrm{Dom}(q_\varepsilon)$ で $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B(P,1) \cup B(Q,1) \cup C_\varepsilon$ を満たすものに対して，$\varphi_1 = \alpha_1 + dr \wedge \beta_1$ と書くとき，

$$q_\varepsilon(\varphi) \quad \geq \quad \frac{1}{2} q_\varepsilon(\varphi_2) + C\{q(\alpha_1) + q(dr \wedge \beta_1)\}$$

が成立する．

Proof. まず，α_1 を $S_{(1)}^{m-1}$ 上で Hodge の分解定理を用いて，$\alpha_1 = \alpha_1^{(d)} + \alpha_1^{(\delta)}$ と分解する．ただし，$\alpha_1^{(d)}$ と $\alpha_1^{(\delta)}$ は α_1 の exact と co-exact part である．なお，m と p の仮定から，$H^p(S^{m-1};\mathbb{R}) = 0$ より harmonic part は現れないことに注意しよう．$\lambda := \lambda_1'^{(p)}(S_{(1)}^{m-1})$ と置くと，min-max 原理より

$$\|\alpha_1^{(d)}\|_0^2 \quad \leq \quad \frac{1}{\lambda}\|\delta_0 \alpha_1^{(d)}\|_0^2. \tag{3.5.1}$$

これより，任意の $\eta > 0$ に対して，Schwarz の不等式と相加・相乗平均の不等式を用いると，

$$\begin{aligned}
|(\frac{\delta_0\alpha_1}{r}, \beta_1)_0| \quad &\leq \quad \|\eta \frac{\alpha_1^{(d)}}{r}\|_0 \, \|\frac{1}{\eta} d_0\, \beta_1\, \|_0 \\
&\leq \quad \frac{1}{2}\{\|\eta \frac{\alpha_1^{(d)}}{r}\|_0^2 + \|\frac{1}{\eta} d_0 \beta_1\|_0^2\} \\
&\leq \quad \frac{1}{2}\{\frac{\eta^2}{\lambda r^2}\|\, \delta_0\, \alpha_1^{(d)}\,\|_0^2 + \frac{1}{\eta^2}\|d_0\beta_1\|_0^2\}.
\end{aligned}$$

が成立する． よって，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^2}\|\delta_0\alpha_1\|_0^2 \quad &+ \quad \|d_0\beta_1\|_0^2 - 4(\frac{\delta_0\alpha_1}{r}, \beta_1)_0 \\
&\geq \quad \frac{1}{r^2}\|\delta_0\alpha_1\|_0^2 + \|d_0\beta_1\|_0^2 - \frac{2\eta^2}{\lambda r^2}\|\delta_0\alpha_1^{(d)}\|_0^2 - \frac{2}{\eta^2}\|d_0\beta_1\|_0^2 \\
&= \quad \frac{1}{r^2}(1 - \frac{2\eta^2}{\lambda})\|\,\delta_0\,\alpha_1\,\|_0^2 + (1 - \frac{2}{\eta^2})\|d_0\beta_1\|_0^2.
\end{aligned}$$

今，$\lambda = \lambda_1'^{(p)}(S^{m-1}(1)) = p(m-p) \geq 6$ なので（[GM-75]），η を $2 < \eta^2 < 3\ (\leq \lambda/2)$ となるように取れば，

$$\frac{1}{r^2}\|\delta_0\alpha_1\|_0^2 \quad + \quad \|d_0\beta_1\|_0^2 - 4(\frac{\delta_0\alpha_1}{r}, \beta_1)_0 \geq 0 \tag{3.5.2}$$

を得る．こうして，Proposition 3.4.6 により，定数 $C>0$ が存在して

$$q(\alpha_1 + dr\wedge\beta_1) \;\; \geq \;\; C\{q(\alpha_1)+q(dr\wedge\beta_1)\}$$

となるので，Lemma は成立する． □

さて，Proposition 3.5.1 の証明に入ろう．

Proof. 始めに，$\alpha_j^{(p)} := \liminf_{\varepsilon\to 0}\lambda_k^{(p)}(\tilde{M}_\varepsilon)$ と置く．$\varphi_{j,\varepsilon} = (\varphi_{j,\varepsilon}^1, \varphi_{j,\varepsilon}^2) \in \mathrm{Dom}(q_\varepsilon)$ $(j=1,\dots,k)$ を $\Phi_\varepsilon^{-1}(\varphi_{j,\varepsilon}) = (\varphi_{j,\varepsilon}^1, h_\varepsilon^{-1}(\varphi_{j,\varepsilon}^2\restriction_{C_1})) \in H^1(\Lambda^p\tilde{M}_\varepsilon)$ が，固有値 $\lambda_j^{(p)}(\tilde{M}_\varepsilon)$ に関する正規直交的な固有形式となるものとする．我々は $\varphi_{j,\varepsilon}$ から (M,g) の固有形式の構成と，ハンドルの成分が無くなることを示したい．

まず，φ_1 の M への拡張を構成しよう．P_ε を Proposition 3.4.7 での $B(P,\varepsilon)$ と $B(Q,\varepsilon)$ への harmonic extension operator とすると，$\varphi_{j,\varepsilon}^1$ の拡張 $\bar{\varphi}_{j,\varepsilon}^1$ を

$$\bar{\varphi}_{j,\varepsilon}^1 \;\; := \;\; P_\varepsilon(\alpha_1 + dr\wedge\beta_1) + (1-\chi)\,\varphi_{j,\varepsilon}^1 \tag{3.5.3}$$

で定める．ここに，$\chi\,\varphi_{j,\varepsilon}^1 = \alpha_1 + dr\wedge\beta_1$ と書いている．この時，Proposition 3.4.7，Lemma 3.4.5 そして，Lemma 3.5.2 により，次の評価が成立する．

$$\|\,\varphi_{j,\varepsilon}\,\|_{q_\varepsilon}^2 \;\; \geq \;\; \frac{1}{2}q_\varepsilon((\varphi_{j,\varepsilon}^2)) + Cq(\bar{\varphi}_{j,\varepsilon}^1). \tag{3.5.4}$$

実際，

$$\begin{aligned}
q(\bar{\varphi}_{j,\varepsilon}^1) &\leq C\{q(P_\varepsilon(\alpha_1)) + q(P_\varepsilon(dr\wedge\beta_1)) + q((1-\chi)\,\varphi_{j,\varepsilon}^1)\}\\
&\leq C\{q(\alpha_1) + q(dr\wedge\beta_1) + q((1-\chi)\,\varphi_{j,\varepsilon}^1)\} \quad \text{(by Proposition 3.4.7)}\\
&\leq C\{q(\chi\varphi_{j,\varepsilon}^1) + q((1-\chi)\,\varphi_{j,\varepsilon}^1)\} \quad \text{(by Lemma 3.5.2)}\\
&\leq C\|\,\varphi_{j,\varepsilon}\,\|_{q_\varepsilon}^2 \quad \text{(by Lemma 3.4.5)}
\end{aligned}$$

から分かる．

すると，3.3 節の固有値の上への有界性から，族 $\{\bar{\varphi}_{j,\varepsilon}^1\}_{\varepsilon>0}$ は $H^1(\Lambda^p M, g)$ ノルムに関して一様有界であることが分かる．実際，

$$\begin{aligned}
\|\bar{\varphi}_{j,\varepsilon}^1\|_{H^1(\Lambda^p M,g)}^2 &\leq C\|\bar{\varphi}_{j,\varepsilon}^1\|_{q_M}^2 \quad \text{(ノルム同値性)}\\
&\leq C\|\,\varphi_{j,\varepsilon}\,\|_{q_\varepsilon}^2 \quad (by\ (3.5.4))\\
&\leq C\{\|\,\varphi_{j,\varepsilon}\,\|_{L^2(\Lambda^p M_\varepsilon)}^2 + q_\varepsilon(\varphi_{j,\varepsilon})\}\\
&\leq C\{1+\lambda_j^{(p)}(\tilde{M}_\varepsilon)\}
\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

であり，最後の式の固有値 $\lambda_j^{(p)}(\tilde{M}_\varepsilon)$ は Proposition 3.3.1 により，一様有界であることが分かる．よって，弱コンパクト性定理から，ある部分列 $\{\bar{\varphi}_{j,\varepsilon_i}^1\}_{i=1}^\infty$ と $\bar{\varphi}_j^1 \in H^1(\Lambda^p M, g)$ が存在して，$\lambda_j^{(p)}(\tilde{M}_{\varepsilon_i}) \to \alpha_j^{(p)}$ かつ $\bar{\varphi}_{j,\varepsilon_i}^1 \to \bar{\varphi}_j^1$ $(\varepsilon_i\to 0)$ が $H^1(\Lambda^p M, g)$ で弱収束，$L^2(\Lambda^p M, g)$ で強収束する．

この時，極限 $\bar{\varphi}^1_j$ が (M,g) の固有形式になることを示す．方法は関数の場合と同様である．すなわち，すべての support がコンパクトな C^∞ p-form $\psi \in \Omega^p_0(M\backslash\{P,Q\})$ に対して，

$$\begin{aligned} q_M(\bar{\varphi}^1_j,\psi) &= \lim_{i\to\infty}\{q_{M_{\varepsilon_i}}(\bar{\varphi}^1_{j,\varepsilon_i},\psi)+q_{C_{\varepsilon_i}}(h^{-1}_{\varepsilon_i}(\varphi^2_{j,\varepsilon_i}\restriction_{C_1}),0)\} \\ &= \lim_{i\to\infty} q(\Phi^{-1}_{\varepsilon_i}(\varphi_{j,\varepsilon_i}),(\psi,0)) \\ &= \lim_{i\to\infty} \lambda_j(\tilde{M}_{\varepsilon_i})\,(\Phi^{-1}_{\varepsilon_i}(\varphi_{j,\varepsilon_i}),(\psi,0))_{L^2(\tilde{M}_{\varepsilon_i})} \\ &= \alpha^{(p)}_j\,(\bar{\varphi}^1_j,\psi)_{L^2(\Lambda^p M,g)}. \end{aligned}$$

である．今，埋め込み $\Omega^p_0(M_1\backslash\{P,Q\})\subset H^1(\Lambda^p M,g)$ は dense なので，すべての $\psi\in H^1(\Lambda^p M,g)$ に対して，$q(\bar{\varphi}_1,\psi)=\alpha^{(p)}_j(\bar{\varphi}_1,\psi)_{L^2(\Lambda^p M,g)}$ が成立する．弱解の正則性定理から，$\bar{\varphi}^1_j\in\Omega^p(M)$ であり $\Delta_M\bar{\varphi}^1_j=\alpha^{(p)}_j\bar{\varphi}^1_j$ が成立する．もし，$\{\bar{\varphi}^1_1,\ldots,\bar{\varphi}^1_k\}$ が正規直交的であれば，$\alpha^{(p)}_i\in\mathrm{Spec}^{(p)}(M,g)$ であり，固有値の番号付けから $\lambda^{(p)}_k(M,g)\le\alpha^{(p)}_k$ が結論できる．

そこで，以下 $\{\bar{\varphi}^1_1,\ldots,\bar{\varphi}^1_k\}$ が正規直交的であることを示そう．始めに，$2\le p\le m-2$ より $H^p(S^{m-1})=0$, $H^{p-1}(S^{m-1})=0$ であるので，$S^{m-1}_{(1)}$ において min-max 原理を用いて評価すると，

$$\lambda^{(p)}_1(S^{m-1}_{(1)}) \le \frac{\|d_0\,\alpha_2\|^2_0+\|\,\delta_0\,\alpha_2\|^2_0}{\|\,\alpha_2\|^2_0},\quad \lambda^{(p-1)}_1(S^{m-1}_{(1)})\le\frac{\|d_0\,\beta_2\|^2_0+\|d_0\,\beta_2\|^2_0}{\|\,\beta_2\|^2_0}.$$

よって，Proposition 3.4.6 により

$$\begin{aligned} q_\varepsilon(\varphi^2_{j,\varepsilon}) &= 2\int_{C_1}\{|\,\alpha'_2\,|^2+|\,\beta'_2\,|^2+\frac{1}{\varepsilon^2}(|d_0\,\alpha_2\,|^2+|\,\delta_0\,\alpha_2\,|^2+|d_0\,\beta_2\,|^2+|\,\delta_0\,\beta_2\,|^2)\}d\mu_{C_1} \\ &\ge \frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^L\{\|d_0\,\alpha_2\|^2_0+\|\,\delta_0\,\alpha_2\|^2_0+\|d_0\,\beta_2\|^2_0+\|\,\delta_0\,\beta_2\|^2_0\}\,ds \\ &\ge \frac{2}{\varepsilon^2}\{\lambda^{(p)}_1(S^{m-1}_{(1)})\|\,\alpha_2\|^2_{L^2(\Lambda^p C_1)}+\lambda^{(p-1)}_1(S^{m-1}_{(1)})\|\,\beta_2\|^2_{L^2(\Lambda^{p-1} C_1)}\} \\ &\ge \frac{2}{\varepsilon^2}\min\{\lambda^{(p)}_1(S^{m-1}_{(1)}),\lambda^{(p-1)}_1(S^{m-1}_{(1)})\}\|\,\alpha_2+ds\wedge\beta_2\|^2_{L^2(\Lambda^p C_1)} \\ &\ge \frac{C}{\varepsilon^2}\|\,\varphi_2\|^2_{L^2(\Lambda^p C_1)} \end{aligned}$$

である．ゆえに，(3.5.4) を用いると，

$$\begin{aligned} \|\,\varphi^2_{j,\varepsilon}\|^2_{L^2(\Lambda^p C_1)} &\le 2C\,\varepsilon^2\,q_\varepsilon(\varphi^2_{j,\varepsilon})\le 2C\,\varepsilon^2\{\lambda^{(p)}_j(\tilde{M}_\varepsilon)+1\} \\ &\to 0\ (\text{as }\ \varepsilon\to 0). \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

次に，

$$\begin{aligned} &\|\bar{\varphi}^1_{j,\varepsilon_i}\|_{L^2(\Lambda^p B(P,\varepsilon_i)\cup B(Q,\varepsilon_i))} \\ &\qquad\le\|\bar{\varphi}^1_{j,\varepsilon_i}-\bar{\varphi}^1_j\|_{L^2(\Lambda^p B(P,\varepsilon_i)\cup B(Q,\varepsilon_i))}+\|\bar{\varphi}^1_j\|_{L^2(\Lambda^p B(P,\varepsilon_i)\cup B(Q,\varepsilon_i))} \\ &\qquad\le\|\bar{\varphi}^1_{j,\varepsilon_i}-\bar{\varphi}^1_j\|_{L^2(\Lambda^p M)}+2\|\bar{\varphi}^1_j\|_{C^0(\Lambda^p M)}\,\mathrm{vol}(B(P,\varepsilon_i)) \\ &\qquad\to\ 0\quad(\varepsilon_i\to 0) \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

に注意しよう．よって，以上より，

$$
\begin{aligned}
\delta_{jl} &= \lim_{i\to\infty}(\Phi_{\varepsilon_i}^{-1}(\varphi_{j,\varepsilon_i}), \Phi_{\varepsilon_i}^{-1}(\varphi_{l,\varepsilon_i}))_{L^2(\Lambda^p \tilde{M}_{\varepsilon_i})} \\
&= \lim_{i\to\infty}\{(\varphi^1_{j,\varepsilon_i}, \varphi^1_{l,\varepsilon_i})_{L^2(\Lambda^p M_{\varepsilon_i})} + (h_\varepsilon^{-1}(\varphi^2_{j,\varepsilon_i}\restriction_{C_1}), h_\varepsilon^{-1}(\varphi^2_{l,\varepsilon_i}\restriction_{C_1}))_{L^2(\Lambda^p C_{\varepsilon_i})}\} \\
&= \lim_{i\to\infty}\{(\varphi^1_{j,\varepsilon_i}, \varphi^1_{l,\varepsilon_i})_{L^2(\Lambda^p M_{\varepsilon_i})} + (\varphi^2_{j,\varepsilon_i}, \varphi^2_{l,\varepsilon_i})_{L^2(\Lambda^p C_1)}\} \\
&= \lim_{i\to\infty}(\varphi^1_{j,\varepsilon_i}, \varphi^1_{l,\varepsilon_i})_{L^2(\Lambda^p M_{\varepsilon_i})} \quad \text{(by (3.5.6))} \\
&= \lim_{i\to\infty}\{(\bar\varphi^1_{j,\varepsilon_i}, \bar\varphi^1_{l,\varepsilon_i})_{L^2(\Lambda^p M)} - (\bar\varphi^1_{j,\varepsilon_i}, \bar\varphi^1_{l,\varepsilon_i})_{L^2(\Lambda^p B(P,\varepsilon_i)\cup B(Q,\varepsilon_i))}\} \\
&= \lim_{i\to\infty}(\bar\varphi^1_{j,\varepsilon_i}, \bar\varphi^1_{l,\varepsilon_i})_{L^2(\Lambda^p M)} \quad \text{(by (3.5.7))} \\
&= (\bar\varphi^1_j, \bar\varphi^1_l)_{L^2(\Lambda^p M)}.
\end{aligned}
$$

こうして，$\{\bar\varphi^1_1, \ldots, \bar\varphi^1_k\}$ が正規直交的であることが分かったので，Proposition 3.5.1 の証明が，従って，$m \geq 5$, $2 \leq p \leq m-2$ において Theorem 1.1.1 の証明が完了する．

□

3.6 固有値の下からの評価（$m = 4$, $p = 2$ の場合）

この節では，前節の Proposition 3.5.1 の主張を，$m = 4, p = 2$ の場合に示す．3.1 で述べた固有値の duality により，$p = 2$ の場合についてのみ調べれば十分である．

さて，その証明は固有形式の調和拡張とそのノルムの評価に関する部分を除いて，全節の証明と全く同様にできる．そこで，この節では固有形式の拡張とそのノルムの評価の方法について述べる．

そもそも，$m = 4, p = 2$ で固有形式の拡張を前節の議論に当てはめた場合，どこが破綻するのだろうか？それは，拡張したノルムの一様な評価が前節の方法では評価できない点である．具体的には，$m = 4, p = 2$ の時 $\lambda_1'^{(p)}(S^{m-1}_{(1)}) = p(m-p) = 4$ より，Lemma 3.5.2 の証明において $2 < \eta^2 < \lambda/2 = 2$ となる η を取ることができず，前節の方法では (3.5.2) を示すことが出来ない．しかし，この障害は以下のように固有空間分解を使って解決できる．その前に，$\eta = 2$ と取ることで，

$$q_\varepsilon(\varphi) \geq \frac{1}{2} q_\varepsilon(\varphi_2^s) \tag{3.6.1}$$

が成立することを注意しておく．これは，後のハンドル上の成分の評価に必要である．

さて，各 $r > 0$ に対して，α_1 と β_1 を $S^{m-1}(1)$ の 2-form と 1-form それぞれの固有空間分解に即して分解する．すなわち，

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= a_4 + A, \\
\beta_1 &= b_4 + B.
\end{aligned} \tag{3.6.2}
$$

ただし，a_4 は $\lambda'^{(2)}(S^3) = 4$ に対応する成分，A はそれの直交補空間の成分であり，b_4 は $\lambda''^{(1)}(S^3) = \lambda'^{(2)}(S^3) = 4$ に対応する成分，B はそれの直交補空間の成分であ

る．この時，$A+dr\wedge B$ に対して全節の評価の議論を用いると，この場合 $\lambda\geq 9$ となり，よって $2<\eta^2<\lambda/2$ となる η が存在する．ゆえに，上記の分解が直交的であることに注意すると，ある定数 $C>0$ が存在して

$$q_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) \;\;\geq\;\; C\{q(A)+q(dr\wedge B)\} \tag{3.6.3}$$

が成立する．そこで，A と $dr\wedge B$ に対して調和拡張をすると，(3.6.3) と Proposition 3.4.7 から，調和拡張の H^1 ノルムが上から一様に評価できることが分かる．

一方，残りの a_4 と b_4 は調和拡張ではなく，直接的に拡張する．すなわち，$B(P,\varepsilon)$ において（$B(Q,\varepsilon)$ の所も同様），$0\leq r<\varepsilon$ に対して

$$\begin{aligned}\tilde{a}_4(r) &= \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^2 a_4(\varepsilon),\\ \tilde{b}_4(r) &= \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^2 b_4(\varepsilon)\end{aligned} \tag{3.6.4}$$

と定める．

Lemma 3.6.1 ([AC-95], Lemme 4.8.)**.** ある定数 $C>0$ が存在して，

$$\begin{aligned}\|\tilde{a}_4(r)\|_{q_M} &\leq C\|\,\varphi_\varepsilon\,\|_{q_\varepsilon},\\ \|dr\wedge\tilde{b}_4\|_{q_M} &\leq C\|\,\varphi_\varepsilon\,\|_{q_\varepsilon}.\end{aligned} \tag{3.6.5}$$

Proof. ここでは $\tilde{a}_4$ の $B(P,\varepsilon)$ での場合のみ示す．$B(Q,\varepsilon)$ の場合も，また，$dr\wedge\tilde{b}_4$ の場合も同様にできる．

$$\|\tilde{a}_4(r)\|^2_{L^2(\Lambda^2 B(P,\varepsilon))} \;=\; \int_0^\varepsilon\int_{S^3}|\frac{r^2}{\varepsilon^2}a_4(\varepsilon)|_0^2 r^{-1}drd\mu_0=\frac{1}{4}\|a_4(\varepsilon)\|^2_{L^2(S^3)},$$

$$q(\tilde{a}_4(r)) \;=\; \int_0^\varepsilon\int_{S^3}\{|\frac{2r}{\varepsilon^2}a_4(\varepsilon)|_0^2 r^{-1}+|\frac{r^2}{\varepsilon^2}a_4(\varepsilon)|_0^2 r^{-3}\}drd\mu_0=\frac{2}{\varepsilon^2}\|a_4(\varepsilon)\|^2_{L^2(S^3)}$$

である．ここで，次の事実を使う．

$$\|a_4(\varepsilon)\|^2_{L^2(S^3)} \;\leq\; C\varepsilon^2 q_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) \tag{3.6.6}$$

すると，求めていた式 $\|\tilde{a}_4(r)\|_{q_M}\leq C\|\,\varphi_\varepsilon\,\|_{q_\varepsilon}$ が従う．

そこで，以下 (3.6.6) を証明すればよい．固有形式のハンドル C_ε 上の成分 $\varphi_2=\alpha_2+ds\wedge\beta_2$ も同様に $S^3_{(1)}$ の固有空間に分解する．

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= a_{2,4}+A_2\\ \beta_1 &= b_{2,4}+B_2\end{aligned} \tag{3.6.7}$$

ここに，$a_{2,4}$ は $\lambda'^{(2)}(S^3)=4$ に対応する成分，A_2 はそれの直交補空間の成分であり，$b_{2,4}$ は $\lambda''^{(1)}(S^3)=\lambda'^{(2)}(S^3)=4$ に対応する成分，B_2 はそれの直交補空間の成分である．

今，貼り付け条件 Definition 3.4.2 により，$\|a_4(\varepsilon)\|_{L^2(\Lambda^2 S^3)} = \sqrt{\varepsilon}\|a_{2,4}(0)\|_{L^2(\Lambda^2 S^3)}$ が分かる．C_ε 上の cut-off function ρ を $s \in [0, L]$ のみに依存する関数で $\rho(0) = 1,\ \rho(L) = 0$ を満たすようにとる．すると，Schwarz の不等式より，

$$\begin{aligned}
\|a_{2,4}(0)\|^2_{L^2(\Lambda^2 S^3)} &= \int_0^L \partial_s\{\|\rho a_{2,4}(s)\|_0^2\}ds \\
&= 2\int_0^L (\partial_s(\rho a_{2,4}(s)), \rho a_{2,4}(s))_0 ds \\
&\leq 2\int_0^L \{\rho'\rho\|a_{2,4}\|_0^2 + \rho^2(a'_{2,4}, a_{2,4})_0\}\ ds \qquad (3.6.8) \\
&\leq C(\rho)\{\|a_{2,4}\|^2_{L^2(\Lambda^2 C_1)} + \|a'_{2,4}\|_{L^2(\Lambda^2 C_1)}\|a_{2,4}\|_{L^2(\Lambda^2 C_1)}\} \\
&\leq C(\rho)\{\|\,\alpha_2\,\|^2_{L^2(\Lambda^2 C_1)} + \|\,\alpha'_2\,\|_{L^2(\Lambda^2 C_1)}\|\,\alpha_2\,\|_{L^2(\Lambda^2 C_1)}\}.
\end{aligned}$$

ただし，$C(\rho)$ は ρ のみに依存する定数である．ここで，Proposition 3.4.6 の q_ε のハンドル上の局所表示と (3.6.1) から，

$$\begin{aligned}
\|\,\alpha'_2\,\|^2_{L^2(\Lambda^2 C_1)} &\leq q_\varepsilon(\varphi_2^s) \leq q_\varepsilon(\varphi) \\
\|\,\alpha_2\,\|^2_{L^2(\Lambda^2 C_1)} &\leq C\varepsilon^2 q_\varepsilon(\varphi_2^s) \leq C\varepsilon^2 q_\varepsilon(\varphi) \qquad (3.6.9)
\end{aligned}$$

が分かる．ゆえに，(3.6.8) に (3.6.9) を代入すれば，

$$\begin{aligned}
\|a_4(\varepsilon)\|^2_{L^2(\Lambda^2 S^3)} &= \varepsilon\,\|a_{2,4}(0)\|^2_{L^2(\Lambda^2 S^3)} \\
&\leq \varepsilon\, C(\rho)\{\|\,\alpha_2\,\|^2_{L^2(\Lambda^2 C_1)} + \|\,\alpha'_2\,\|_{L^2(\Lambda^2 C_1)}\|\,\alpha_2\,\|_{L^2(\Lambda^2 C_1)}\} \\
&\leq \varepsilon\, C(\rho)\{\varepsilon^2 + \varepsilon\}q_\varepsilon(\varphi) \leq C(\rho)\varepsilon^2 q_\varepsilon(\varphi).
\end{aligned}$$

こうして， Lemma の証明が完了した． □

さて，拡張の準備とその評価の準備が整った．$\varphi_{1,\varepsilon}$ の拡張 $\bar{\varphi}_{1,\varepsilon}$ を

$$\bar{\varphi}_{1,\varepsilon} \ := \ \begin{cases} \{\tilde{a}_4 + P_\varepsilon(A)\} + \{dr \wedge \tilde{b}_4 + P_\varepsilon(dr \wedge B)\} & \text{on } B(P,\varepsilon) \cup B(Q,\varepsilon), \\ \varphi_{1,\varepsilon} & \text{on } M \setminus B(P,\varepsilon) \cup B(Q,\varepsilon), \end{cases}$$

を定めると，(3.6.3) と Lemma 3.6.1 より，

$$\|\bar{\varphi}_{1,\varepsilon}\|_{q_M} \ \leq \ C\|\,\varphi_\varepsilon\,\|_{q_\varepsilon}$$

が成立する．つまり，$\bar{\varphi}_{1,\varepsilon}$ の一様有界性が分かる．

一方，$\varphi_{2,\varepsilon} \to 0\ (\varepsilon \to 0)$ は $m \geq 5$ の場合と同様に min-max 原理を使って証明できる．残りの部分の証明も $m \geq 5$ の時と同様なので，$m = 4,\ p = 2$ の場合の証明が完成する．

3.7 固有値の下からの評価（$p = 1$, $m - 1$ の場合）

この節では，3.5 節の Proposition 3.5.1 の主張を $p = 1$ の場合に示す．Hodge duality より $p = m-1$ の場合も分かる．exact 1-form の固有値は関数の正の固有値と一致するので，co-exact 1-form の固有値について調べれば十分である．実は，3.1 で述べた固有値の duality により，$m \geq 4$ の場合は 2-form の固有値から co-exact 1-form の固有値の収束が分かる．よって，本質的なのは $m = 3$ の場合ということになる．しかし，ここでは一般次元の co-exact 1-form の固有値の収束について考察する．さて，1-form の固有値の取り扱いは難しい．その主な原因は次の 2 点である：

- 球面 S^{m-1} に harmonic 0-form が存在する．
- harmonic extension に関する Proposition 3.4.7 が a priori には使えない．

まずは，次の評価から始めよう．

Lemma 3.7.1 ([AC-95], Lemme 5.1.). (3.4.4) のような区分的 C^∞ 級の *cut-off function* χ が存在して，任意の *co-closed form* $\varphi \in \mathrm{Dom}(q_\varepsilon)$ に対して，

$$\begin{aligned} q_\varepsilon(\chi\varphi) &= \frac{1}{2}q_\varepsilon(\varphi_2^s) + \sum_{x=P,Q}\int_{\substack{B(x,\frac{1}{2})\\ -B(x,\varepsilon)}} r^{m-3}\Big\{|\alpha_1'|_0^2 + \frac{1}{r^2}|d_0\alpha_1|_0^2 + \frac{1}{r^2}|\delta_0\alpha_1|_0^2 \\ &\quad +|d_0\beta_1|_0^2 + |\delta_0\beta_1|_0^2 - 4\langle\frac{\delta_0\alpha_1}{r},\beta_1\rangle_0\Big\} + r^{-(m-1)}|(r^{m-1}\beta_2)'|_0^2\, dr d\mu_0 \end{aligned} \tag{3.7.1}$$

が成立する．

Proof. 証明の概略だけ述べる．方針は，$R_\varepsilon := q_\varepsilon(\chi\varphi) - (\text{Lemma 3.7.1 の右辺}) \geq 0$ となるような，cut-off function χ を見つければよい．計算すると，

$$R_\varepsilon \geq \sum_{P,Q}\int_{\frac{1}{2}}^{1} r^{m-1}\{\frac{(\chi')^2}{2} + \frac{2\chi\chi'}{r}\}\,\beta_1^2\,dr$$

である．そこで，$\frac{(\chi')^2}{2} + \frac{2\chi\chi'}{r} > 0$ となるには，cut-off function χ を

$$\chi(r) = \begin{cases} 1 & \text{if } r \leq \frac{1}{2}, \\ 5 - 8r & \text{if } \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{5}{8}, \\ 0 & \text{if } \frac{5}{8} \leq r, \end{cases}$$

と取ればよいことが分かる． □

Proposition 3.7.2 ([AC-95], Thm. 5.2.). ある ε によらない定数 $C > 0$ が存在して，$\tilde{M}_\varepsilon$ の *co-exact* 1-*form* に作用する *Laplacian* の固有値は下から一様に C で押さえられる．すなわち，

$$\lambda_1''^{(1)}(\tilde{M}_\varepsilon) \geq C.$$

これを示すために次の McGowan による Lemma を用いる．

Lemma 3.7.3 ([MG-93], Lemma 2.3). $\{U_i\}_{i\in I}$ を $\tilde{M}_\varepsilon$ の有限開被覆で，$U_{ij} := U_i \cap U_j$, $U_{ijk} := U_i \cap U_j \cap U_k$ と置く．$\nu_1'^{(p)}(U)$ で U 上の *absolute boundary condition* を満たす *exact p-form* に作用する *Laplacian* の正の第 1 固有値を表わすとき，

$$\lambda_N'^{(2)}(\tilde{M}_\varepsilon) \geq \frac{1}{\sum_i \{\frac{1}{\nu_1'^{(2)}(U_i)} + \sum_{j, U_{i,j}\neq\phi}(\frac{C_\rho}{\nu_1'^{(1)}(U_{ij})} + 1)(\frac{1}{\nu_1'^{(2)}(U_i)} + \frac{1}{\nu_1'^{(2)}(U_j)})\}}.$$

が成立する．ただし，$N = 1 + \sum_{ij} \dim H^1(U_{ij}; \mathbb{R}) + \sum_{ijk} \dim H^0(U_{ijk}; \mathbb{R})$ であり，C_ρ は $\{U_i\}$ の 1 の分割 $\{\rho_i\}_i$ による定数である．

これを用いて，Proposition 3.7.2 を示そう．

Proof. $\tilde{M}_\varepsilon$ の開被覆を次のように取る．

$$\begin{aligned} U_1 &:= M_\varepsilon = M - \{B(P,\varepsilon) \cup B(Q,\varepsilon)\}, \\ U_2 &:= C_\varepsilon \cup \{B(P,1) - B(P,\varepsilon)\} \cup \{B(Q,1) - B(Q,\varepsilon)\}. \end{aligned}$$

このとき，$U_{12} = \{B(P,1) - B(P,\varepsilon)\} \sqcup \{B(Q,1) - B(Q,\varepsilon)\}$ より，$H^1(U_{12}) = 0$ かつ $U_{ijk} = \phi$ なので，$N = 1$ である．よって，McGowan の補題 3.7.3 より，

$$\lambda_1''^{(1)}(\tilde{M}_\varepsilon) = \lambda_1'^{(2)}(\tilde{M}_\varepsilon) \geq \frac{1}{\sum_{i=1}^2 \{\frac{1}{\nu_1'^{(2)}(U_i)} + \sum_{j, U_{i,j}\neq\phi}(\frac{C_\rho}{\nu_1'^{(1)}(U_{ij})} + 1)(\frac{1}{\nu_1'^{(2)}(U_i)} + \frac{1}{\nu_1'^{(2)}(U_j)})\}}.$$

そこで，$\nu_1'^{(2)}(U_1)$, $\nu_1'^{(2)}(U_2)$, $\nu_1'^{(1)}(U_{12})$ を評価すればよい．

まず，Anné-Colbois [AC-93] の定理より，

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} \nu_1'^{(2)}(U_1) &= \lambda_1'^{(2)}(M), \\ \lim_{\varepsilon\to 0} \nu_1'^{(1)}(U_{12}) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \mu_1^{(0)}(U_{12}) = \mu_1^{(0)}(B(P,1)) \end{aligned}$$

が成立する．すなわち，$\nu_1'^{(2)}(U_1)$ と $\nu_1'^{(1)}(U_{12})$ は ε に依らない正の定数で一様に押さえられる．よって，$\nu_1'^{(2)}(U_2)$ の一様な下からの評価が得られれば，Proposition 3.7.2 の証明が終わる．以下これを証明するが，なかなか大変である．

まず，3.1 節の Lemma 3.1.7 で述べた duality から，$\nu_1'^{(2)}(U_2) = \mu_1''^{(1)}(U_2)$ なので，$\mu_1''^{(1)}(U_2)$ を評価すれば十分である．$\dim H^1(U_2, \partial U_2) = 1$ より，relative boundary condition を満たす U_2 上の harmoic 1-form は 1 次元ある．そして，その底が具体的に

$$\omega_0 \;:=\; \begin{cases} \varepsilon^{-\frac{m-1}{2}} \mathrm{vol}(S^{m-1}(1)) ds & \text{on } C_\varepsilon, \\ \pm\varepsilon^{\frac{m-1}{2}} \mathrm{vol}(S^{m-1}(1))^{-1} \frac{dr}{r^{m-1}} & \text{on } B(x,1) \setminus B(x,\varepsilon), \end{cases}$$

（ただし，$x = P$ の時は符号 $+$，$x = Q$ の時は符号 $-$ を採用する．）

と書ける．これは大きな利点である．

さて，relative boundary condition を満たす，正規化された co-exact 1-form の列 $\varphi_{\varepsilon_i} \in H^1(\Lambda^1 U_2)$ $(i = 1, 2, \dots,)$ で，

$$\Delta_{\varepsilon_i} \varphi_{\varepsilon_i} \;=\; \mu(\varepsilon_i)\, \varphi_{\varepsilon_i}, \quad \mu(\varepsilon_i) \to \mu \text{ as } i \to \infty$$

となるものを取る（μ は下極限をとればよい）．我々の目標は，$\mu > 0$ を示すことである．すると，$\mu_1''^{(1)}(U_2)$ の下からの一様な評価が従う．

$\varphi_{\varepsilon_i} = (\varphi_{\varepsilon_i,1}\, \varphi_{\varepsilon_i,2})$ を接成分（tangential part）と法成分（normal part）に分解する．

$$\begin{aligned} \varphi_{\varepsilon_i,1} &= C_{\varepsilon_i,1}(r,\theta)\frac{dr}{r^{m-1}} + \psi_{\varepsilon_i,1} \\ \varphi_{\varepsilon_i,2} &= C_{\varepsilon_i,2}(s,\theta)\frac{ds}{{\varepsilon_i}^{\frac{m-1}{2}}} + \psi_{\varepsilon_i,2}. \end{aligned} \tag{3.7.2}$$

今までの記法では，$\alpha_1 = \psi_{\varepsilon_i,1}$, $\beta_1 = r^{-(m-1)} C_{\varepsilon_i,1}$, $\alpha_2 = \psi_{\varepsilon_i,2}$, $\beta_2 = {\varepsilon_i}^{-\frac{m-1}{2}} C_{\varepsilon_i,2}$ である． φ_{ε_i} は co-closed なので，$\delta \varphi_{\varepsilon_i,k} = 0$ $(k = 1, 2)$ を計算すると，

$$\begin{aligned} \partial_r C_{\varepsilon_i,1} &= r^{m-3}\, \delta_0\, \psi_{\varepsilon_i,1} \\ \partial_s C_{\varepsilon_i,2} &= {\varepsilon_i}^{\frac{m+1}{2}}\, \delta_0\, \psi_{\varepsilon_i,2} \end{aligned} \tag{3.7.3}$$

を得る．すると，

$$\partial_r \{(C_{\varepsilon_i,1}, 1)_0\} \;=\; (\partial_r C_{\varepsilon_i,1}, 1)_0 = (r^{m-3}\, \delta_0\, \psi_{\varepsilon_i,1}, 1)_0 = 0$$

より，$(C_{\varepsilon_i,1}, 1)_0$ は r について定数である．同様にして，$(C_{\varepsilon_i,2}, 1)_0$ も s について定数である．さらに，$(\varphi_{\varepsilon_i}, \omega_0)_{L^2} = 0$ なので，すべての $r > \varepsilon_i$ に対して $(C_{\varepsilon_i,1}, 1)_0 \equiv 0$, $(C_{\varepsilon_i,2}, 1)_0 \equiv 0$ である．こうして，$C_{\varepsilon_i,1}$, $C_{\varepsilon_i,2}$ は $S^{m-1}_{(1)}$ 上の定数関数（i.e. 調和関数）と直交するので，min-max 原理より，

$$\lambda_1(S^{m-1}_{(1)}) \|C_{\varepsilon_i,k}\|^2_{L^2(S^{m-1}_{(1)})} \;\leq\; \|d_0 C_{\varepsilon_i,k}\|^2_{L^2(S^{m-1}_{(1)})} \ (k = 1, 2) \tag{3.7.4}$$

がすべての r, $s > \varepsilon_i$ に対して成立する．

今，$m \geq 4$ とする．始めに，Lemma 3.5.2 と同じ評価が成立する．

Lemma 3.7.4. 任意の *co-closed 1-form* $\varphi \in \mathrm{Dom}(q_\varepsilon)$ で $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B(P,1) \cup B(Q,1) \cup C_\varepsilon$ を満たすものに対して，

$$q_\varepsilon(\chi\varphi) \;\geq\; \frac{1}{2} q_\varepsilon(\varphi_2^s) + C\{q(\alpha_1) + q(dr \wedge \beta_1)\}$$

が成立する．

Proof. まず，$\delta\varphi = 0$ より，$\delta_0\, \alpha_1 = \frac{1}{r^{m-1}} \partial_r(r^{m-1}\, \beta_1)$ であるから，Lemma 3.7.1 に代入すると，

$$\begin{aligned} q_\varepsilon(\chi\varphi) \;\geq\; & \frac{1}{2} q_\varepsilon(\varphi_2^s) + \sum_{x=P,Q} \int_{\substack{B(x,\frac{1}{2}) \\ -B(x,\varepsilon)}} r^{m-3}\{|\, \alpha_1'\, |_0^2 + |d_0\, \beta_1\, |_0^2\} + r^{m-5} |d_0\, \alpha_1\, |_0^2 \\ & + \frac{2}{r^{m-1}} |(r^{m-1}\, \beta_1)'|_0^2 - \frac{4}{r} \langle (r^{m-1}\, \beta_1)', \beta_1 \rangle_0\; dr d\mu_0. \end{aligned}$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
-\frac{4}{r}\langle (r^{m-1}\beta_1)', \beta_1\rangle_0 &\geq -2\{|r^{-\frac{m-1}{2}}\eta (r^{m-1}\beta_1)'|_0^2 + |r^{\frac{m-1}{2}-1}\eta^{-1}\beta_1|_0^2\} \\
&\geq -2\{\frac{\eta^2}{r^{(m-1)}}|(r^{m-1}\beta_1)'|_0^2 + \frac{r^{m-3}}{\eta^2}|\beta_1|_0^2\}
\end{aligned}
$$

に注意すると，

$$
\begin{aligned}
q_\varepsilon(\chi\varphi) &\geq \frac{1}{2}q_\varepsilon(\varphi_2^s) + \sum_{x=P,Q}\int_{\substack{B(x,\frac{1}{2}) \\ -B(x,\varepsilon_i)}} r^{m-3}|\alpha_1{}'|_0^2 + r^{m-5}|d_0\alpha_1|_0^2 + r^{m-3}|\delta_0\beta_1|_0^2 + \\
&\qquad \frac{2}{r^{m-1}}(1-\eta^2)|(r^{m-1}\beta_1)'|_0^2 - \frac{2}{\eta^2}r^{m-3}|\beta_1|_0^2\, dr d\mu_0 \quad (0 < \eta \leq 1)
\end{aligned}
$$

を得る．$m \geq 4$ より $\lambda_1(S^{m-1}_{(1)}) \geq 3$ と，β_1 の調和関数との直交性から，min-max 原理を用いると，

$$
\|d_0\beta_1\|_0^2 - \frac{2}{\eta^2}\|\beta_1\|_0^2 \geq (3 - \frac{2}{\eta^2})\|\beta_1\|_0^2
$$

を得る．ゆえに，$\frac{2}{3} < \eta^2 < 1$ と取れば，ある定数 $C > 0$ が存在して

$$
q_\varepsilon(\chi\varphi) \geq \frac{1}{2}q_\varepsilon(\varphi_2^s) + C\{q(\alpha_1) + q(\beta_1\, dr)\} \tag{3.7.5}
$$

が成立の成立が分かる． □

また，固有値にハンドルの寄与が現れないことも分かる．

Lemma 3.7.5. $\lim_{i\to\infty}\|\varphi_{\varepsilon_i,2}\|^2_{L^2(\Lambda^1 C_1)} = 0$.

Proof. $H^1(S^{m-1}) = 0$ かつ β_2 は S^{m-1} の定数関数と直交するので，$S^{m-1}(1)$ において min-max 原理より，

$$
\lambda_1^{(1)}(S^{m-1}_{(1)}) \leq \frac{\|d_0\alpha_2\|_0^2 + \|\delta_0\alpha_2\|_0^2}{\|\alpha_2\|_0^2}, \quad \lambda_1^{(0)}(S^{m-1}_{(1)}) \leq \frac{\|d_0\beta_2\|_0^2}{\|\beta_2\|_0^2}.
$$

これより，(3.5.6) と同様の計算を実行すると，

$$
\begin{aligned}
q_\varepsilon(\varphi_2^s) &= 2\int_{C_1}\{|\alpha_2'|^2 + |\beta_2'|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}(|d_0\alpha_2|^2 + |\delta_0\alpha_2|^2 + |d_0\beta_2|^2)\}d\mu_{C_1} \\
&\geq \frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^L\{\|d_0\alpha_2\|_0^2 + \|\delta_0\alpha_2\|_0^2 + \|d_0\beta_2\|_0^2\}ds \\
&\geq \frac{2}{\varepsilon^2}\min\{\lambda_1^{(1)}(S^{m-1}_{(1)}), \lambda_1^{(0)}(S^{m-1}_{(1)})\}\|\alpha_2 + ds\,\beta_2\|^2_{L^1(\Lambda^1 C_1)} \\
&\geq \frac{C}{\varepsilon^2}\|\varphi_2\|^2_{L^2(\Lambda^1 C_1)}
\end{aligned} \tag{3.7.6}
$$

ゆえに，

$$
\begin{aligned}
\|\varphi_{\varepsilon_i,2}\|^2_{L^2(\Lambda^1 C_1)} &\leq 2C{\varepsilon_i}^2 q_{\varepsilon_i}(\varphi^s_{\varepsilon_i,2}) \leq 2C{\varepsilon_i}^2\{\lambda_j^{(p)}(\tilde{M}_{\varepsilon_i}) + 1\} \\
&\to 0 \ (\text{as } \ \varepsilon_i \to 0).
\end{aligned} \tag{3.7.7}
$$

□

以上の 2 つの Lemma に注意すれば，Proposition 3.5.1 の証明がそのまま適用できる．よって，$\mu \in \mathrm{Spec}^{(1)}_{rel}(B(P,1) \sqcup B(Q,1))$ が分かる．ここに，Spec_{rel} は relative condition を満たすスペクトルを意味する．さて，$H^1(B(P,1), \partial B(P,1)) = H^{m-1}(B(P,1)) = 0$ より，このスペクトルの集合に 0 固有値は存在しないので，$\mu > 0$ が分かる．

次に，$m = 3$ の場合を考える．この場合は，$\lambda_1(S^{m-1}_{(1)}) = 2$ なので，$m \geq 4$ の場合のように $\| d_0 \beta_1 \|_0^2$ と $\frac{2}{\eta^2} \| \beta_1 \|_0^2$ をまとめることが出来ない．実際，上の式で $\eta = 1$ と取ると，

$$q_{\varepsilon_i}(\varphi_{\varepsilon_i}) \geq \frac{1}{2} q_{\varepsilon_i}(\varphi^2_{\varepsilon_i,2}) \tag{3.7.8}$$

しか示すことができない．そこで，3.6 節の (3.6.2) ように α_1 と β_1 を $S^2_{(1)}$ の固有値 2 に対応する固有空間とその直交成分とに分解する．

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_{1,2} + \alpha_{1,\perp}, \\ \beta_1 &= \beta_{1,2} + \beta_{2,\perp}. \end{aligned} \tag{3.7.9}$$

すると，$\frac{\| d_0 \beta_{1,\perp} \|_0^2}{\| \beta_{1,\perp} \|_0^2} \geq \lambda_2(S^2_{(1)}) > 2$ なので，$m \geq 4$ の場合で述べた式の証明において $\eta < 1$ となるように取れば，

$$q_\varepsilon(\chi \varphi_\varepsilon) \geq C\{q(\alpha_{1,\perp}) + q(\beta_{1,\perp}\, dr)\} \tag{3.7.10}$$

が成立する．そこで，$\alpha_{1,\perp}$, $\beta_{1,\perp}$ をそれぞれ Proposition 3.4.7 により harmonic extension し，そのノルムは一様に評価できる．

他方，残りの成分 $\alpha_{1,2}$，$\beta_{1,2}$ の拡張は，(3.6.4) のように定める．

$$\tilde{\alpha}_{1,2} = \left(\frac{r}{\varepsilon_i}\right)^2 \alpha_{1,2} \tag{3.7.11}$$

$$\tilde{\beta}_{1,2} = \left(\frac{r}{\varepsilon_i}\right)^2 \beta_{1,2} \tag{3.7.12}$$

すると，Lemma 3.6.1 のように各々のノルムは上から一様に評価が出来る．こうして，$\varphi_{1,\varepsilon_i}$ の拡張が一様に評価でき，Proposition 3.5.1 あるいは，上述の $m \geq 4$ の証明が適用できる．よって，$\mu \in \mathrm{Spec}^{(1)}_{rel}(B(P,1) \sqcup B(Q,1))$ が分かる．そして，$H^2(B(P,1)) = 0$ より，このスペクトルの集合に 0 固有値は存在しないので，$\mu > 0$ が分かる．

以上より，Proposition 3.7.2 の証明がすべて終了した． □

最後に，co-exact 1-form の固有値の収束を示して，このノートを締めくくろう．まず，次の Proposition が成立する．

Proposition 3.7.6 ([AC-95], Prop.5.9)**.** ある $\omega_H \in H^1(\Lambda^1 \tilde{M}_\varepsilon)$ が存在して，$\Delta\omega_H \equiv 0$ かつ $\|\omega_H - \rho\omega_0\|_q = O(\varepsilon^{\frac{m-1}{2}})$ が成立する．ただし，ρ は

$$\rho \;=\; \begin{cases} 1 & \mathit{for}\ r \le \frac{1}{2}, \\ 0 & \mathit{for}\ r = 1 \end{cases}$$

となる *cut-off function* である．

この証明には [A-95] による次の抽象的な Lemma が必要である（証明は省略する）．

Lemma 3.7.7 ([AC-95] Prop.3.10, [A-95])**.** (q, D) を *Hilbert* 空間 $(H, \langle\ \rangle_H)$ の正定値の閉 2 次形式とし，その同伴するノルムを

$$\|f\|_q^2 := \|f\|_H^2 + q(f),\ (f \in D)$$

と定める．$\mathrm{Spec}(q)$ を q のスペクトルとしたとき，有界開区間 $I \subset \mathbb{R}$ を $\partial I \cap \mathrm{Spec}(q) = \phi$ ととる．π_I で I にある q のスペクトルの射影としたとき，次を満たす定数 $C > 0$ （I と $dist(\partial I, \mathrm{Spec}(q))$ にのみ依存する）が存在する．

各 $f \in D$ で $\|f\| = 1$ に対して，ある $\lambda \in I$ と $\delta > 0$ が存在して，任意の $h \in D$ に対して

$$|q(f,h) - \lambda\langle f, h\rangle_H| \le \delta\,\|h\|$$

が成立すれば，

$$\|f - \pi_I(f)\|_q \le C\,\delta$$

となる．

Proof. この Lemma と次の評価式

$$\begin{aligned} q(\rho\omega_0) &= O(\varepsilon^{m-1}), \\ \|\rho\omega_0\|_{L2} &= 1 + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

から Proposition 3.7.6 は従う． □

さて，$\varphi_\varepsilon = (\varphi_{1,\varepsilon}, \varphi_{2,\varepsilon}) \in \mathrm{Dom}(q_\varepsilon)$ を $\|\,\varphi_\varepsilon\,\| \equiv 1$ で，固有値 $\lambda_j''^{(1)}(\tilde{M}_\varepsilon)$ に対応する co-exact な eigen 1-form とする．今，χ を Lemma 3.4.5 で取った cut-off function として，前と同様に $B(P,1)$ と $B(Q,1)$ の近傍での φ_ε の局所表示を

$$\begin{aligned} \chi\,\varphi_{1,\varepsilon} &= \alpha_1 + \beta_1\,dr, \\ \chi\,\varphi_{2,\varepsilon} &= \alpha_2 + \beta_2\,ds \end{aligned}$$

と書く．ここで，β_i は関数である．そこで，β_1, β_2 を $S^{m-1}_{(1)}$ の harmonic part とその直交成分に分解する．

$$\begin{aligned} \beta_1\,dr &= C_1(r)\frac{1}{r^{m-1}}dr + \bar{\beta}_1(r,\theta)dr \\ \beta_2\,dr &= C_2(s)\frac{1}{\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}}ds + \bar{\beta}_2(s,\theta)ds \end{aligned} \tag{3.7.13}$$

ここに，$\bar{\beta}_i$ は $S^{m-1}_{(1)}$ の harmonic part と直交する成分，すなわち，$\displaystyle\int_{S^{m-1}} \bar{\beta}_i\,d\mu_0 = 0$ を満たしている．

Lemma 3.7.8. 次の評価が成立する．

(1) $\|P_\varepsilon(\alpha_1 + dr\bar{\beta}_1)\|_q^2 \leq C\|\varphi_\varepsilon\|_{q_\varepsilon}^2,$

(2) $q_\varepsilon(\varphi^s_{\varepsilon,2}) \leq C\|\varphi_\varepsilon\|_{q_\varepsilon}^2,$

(3) $\|\alpha_2 + ds\bar{\beta}_2\|^2_{L^2(\Lambda^1 C_1)} \leq C\,\varepsilon^2\, q_\varepsilon(\varphi_\varepsilon),$

が成立する．ただし，(1) において $m = 3$ の場合は *Proposition 3.7.2* の証明の (3.6.4) のように分解して拡張したものとする．

Proof. まず，(1) について示そう．始めに拡張は

$$P_\varepsilon(\alpha_1 + dr\bar{\beta}_1) := \begin{cases} P_\varepsilon(\alpha_1) + P_\varepsilon(\bar{\beta}_1 dr) & (m \geq 4), \\ \{\tilde{\alpha}_{1,2} + P_\varepsilon(\alpha_{1,\perp})\} + \{\tilde{\bar{\beta}}_{1,2}\,dr + P_\varepsilon(\bar{\beta}_{1,\perp}dr)\} & (m = 3) \end{cases}$$

であることに注意しよう．本質的には Proposition 3.7.2 の証明と同様であるが，$(\delta_0\,\alpha_1, C_1)_0 = (\alpha_1, d_0C_1)_0 = 0$ であるので，β_1 の harmonic part を除いて評価可能な点を考慮すればよい．

(2) については，例えば (3.7.8) のように $\eta = 1$ と取ればよい．

(3) について．前と同様に $S^{m-1}_{(1)}$ における min-max 原理を用いる．$H^1(S^{m-1}) = 0$ であり，一方，$\bar{\beta}_2$ は harmonic part を除いているので，

$$\lambda_1^{(1)}(S^{m-1}_{(1)}) \leq \frac{\|d_0\,\alpha_2\|_0^2 + \|\delta_0\,\alpha_2\|_0^2}{\|\alpha_2\|_0^2},\ \lambda_1^{(0)}(S^{m-1}_{(1)}) \leq \frac{\|d_0\,\beta_2\|_0^2 + \|\delta_0\,\beta_2\|_0^2}{\|\bar{\beta}_2\|_0^2}$$

が成立する．よって，

$$\begin{aligned} q_\varepsilon(\varphi^s_{2,\varepsilon}) &= 2\int_{C_1}\{|\alpha_2'|^2 + |\beta_2'|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}(|d_0\,\alpha_2|^2 + |\delta_0\,\alpha_2|^2 + |d_0\,\beta_2|^2 + |\delta_0\,\beta_2|^2)\}d\mu_{C_1} \\ &\geq \frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^L \{\|d_0\,\alpha_2\|_0^2 + \|\delta_0\,\alpha_2\|_0^2 + \|d_0\,\beta_2\|_0^2 + \|\delta_0\,\beta_2\|_0^2\}ds \\ &\geq \frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^L \{\lambda_1^{(1)}(S^2(1))\|\alpha_2\|_0^2 + \lambda_1^{(0)}(S^2(1))\|\bar{\beta}_2\|_0^2\}ds \\ &\geq \frac{2}{\varepsilon^2}\min\{\lambda_1^{(1)}(S^2(1)), \lambda_1^{(0)}(S^2(1))\}\|\alpha_2 + \bar{\beta}_2 ds\|^2_{L^2(\Lambda^1 C_1)} \end{aligned}$$

が従う． □

Lemma 3.7.9 ([AC-95] Prop.5.12.)**.** $C_1,\ C_2$ は r, s, θ によらない定数で，$C_1 \equiv C_2 \equiv O(\varepsilon^{m-1})$ である．

Proof. φ_ε は co-closed より，

$$\delta_0\,\alpha_1 = \frac{1}{r^{m-3}}(r^{m-1}\,\beta_1)', \quad \varepsilon\,\delta_0\,\alpha_2 = \beta_2'$$

である．ゆえに，各 $r,\ s>0$ に対して，

$$
\begin{aligned}
C_1'(r) &= (\{r^{m-1}(\beta_1 - \bar{\beta}_1)\}', 1)_0 = r^{m-3}(\delta_0\, \alpha_1, 1)_0 = 0,\\
C_2'(s) &= \varepsilon^{\frac{m-1}{2}}((\beta_2 - \bar{\beta}_2)', 1)_0 = \varepsilon^{\frac{m-1}{2}}(\delta_0\, \alpha_2, 1)_0 = 0,
\end{aligned}
$$

であるから，$C_1,\ C_2$ はともに定数である．さらに，貼り付け条件 Definition 3.4.2 より $C_1 \equiv C_2$ である．

次に，ε によるオーダーを決定しよう．φ_ε と ω_H は直交するので，

$$
\begin{aligned}
|(\varphi_\varepsilon, \omega_0)_{L^2(\Lambda^1 B(P,\frac{1}{2})\sqcup B(Q,\frac{1}{2}))}| &= |(\varphi_\varepsilon, \rho\omega_0 - \omega_H)_{L^2(\Lambda^1 B(P,\frac{1}{2})\sqcup B(Q,\frac{1}{2}))} - (\varphi_\varepsilon, \rho\omega_0)_{L^2(\Lambda^1 M_{1/2})}|\\
&\leq \|\,\varphi_\varepsilon\,\|_{L^2(\tilde{M}_\varepsilon)}\{\|\rho\omega_0 - \omega_H\|_{L^2(\tilde{M}_\varepsilon)} + \|\rho\omega_0\|_{L^2(\Lambda^1 M_{1/2})}\}\\
&= O(\varepsilon^{\frac{m-1}{2}})
\end{aligned}
$$

である．ここで，最後の式は Proposition 3.7.6 と ω_0 の定義による．

他方，左辺を計算すると，

$$
\begin{aligned}
&|(\varphi_\varepsilon, \omega_0)_{L^2(\Lambda^1 B(P,\frac{1}{2})\sqcup B(Q,\frac{1}{2}))}|\\
&\quad = |(\alpha_1 + \frac{C_1}{r^{m-1}}dr + \bar{\beta}_1 dr,\ \pm\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}\operatorname{vol}(S^{m-1}_{(1)})^{-1}\frac{dr}{r^{m-1}})_{L^2(\Lambda^1 B(P,\frac{1}{2})\sqcup B(Q,\frac{1}{2}))}|\\
&\quad = |2C_1\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}\int_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\frac{1}{r^{m-1}}dr| = C_1 O(\varepsilon^{-\frac{m-1}{2}}).
\end{aligned}
$$

以上を合わせると， $C_1 \equiv O(\varepsilon^{m-1})$ が従う． □

以上 φ_1 のそれぞれの成分の拡張を合わせて，$\varphi_{1,\varepsilon}$ の M 上への拡張 $\bar{\varphi}_{1,\varepsilon}$ を次のように構成する．

$$
\bar{\varphi}_{1,\varepsilon} := \begin{cases}
\{P_\varepsilon(\alpha_1) + C_1\frac{1}{\varepsilon^{m-1}}dr + P_\varepsilon(\bar{\beta}_1 dr)\} + (1-\chi)\,\varphi_{1,\varepsilon} & (m \geq 4),\\
\{\tilde{\alpha}_{1,2} + P_\varepsilon(\alpha_{1,\perp})\} + \{C_1\frac{1}{\varepsilon^{m-1}}dr + \tilde{\bar{\beta}}_{1,2}\,dr & \\
\qquad + P_\varepsilon(\bar{\beta}_{1,\perp}dr)\} + (1-\chi)\,\varphi_{1,\varepsilon} & (m=3).
\end{cases}
\tag{3.7.14}
$$

ここで，$C_1\frac{1}{r^{m-1}}dr$ の $B(P,\varepsilon)$ と $B(Q,\varepsilon)$ 上への拡張は $C_1\frac{1}{\varepsilon^{m-1}}dr$ と取る．

この時，$\{\|\bar{\varphi}_{1,\varepsilon}\|_{q_M}\}_\varepsilon$ は一様有界である．実際，Lemma 3.7.8, Lemma 3.4.5 と Lemma 3.7.9 により，

$$
\begin{aligned}
\|\bar{\varphi}_{1,\varepsilon}\|^2_{q_M} &\leq C\{\|\,\varphi_{1,\varepsilon}\,\|^2_{q_{M_\varepsilon}} + \|C_1\frac{1}{\varepsilon^{m-1}}dr\|^2_{q_M} + \|(1-\chi)\,\varphi_{1,\varepsilon}\,\|^2_q\}\\
&\leq C\|\,\varphi_\varepsilon\,\|^2_{q_\varepsilon} + O(1) \leq C
\end{aligned}
$$

となる．

一方，Lemma 3.7.8 (3) と Lemma 3.7.9 より，

$$
\begin{aligned}
\|\,\varphi^s_{2,\varepsilon}\,\|^2_{L^2(\Lambda^1 C_1)} &= 2\|\,\alpha_2 + \bar{\beta}_2 ds\|^2_{L^2(\Lambda^1 C_1)} + \|C_2(\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}}ds\|^2_{L^2(\Lambda^1 C_1)}\\
&\leq 2C\,\varepsilon^2\,q_\varepsilon(\varphi_{2,\varepsilon}) + O(\varepsilon^{\frac{m-1}{2}})\\
&\leq 2C\,\varepsilon^2\,\|\,\varphi_\varepsilon\,\|^2_q + O(\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}) \to 0 \quad (\text{as } \varepsilon \to 0)
\end{aligned}
$$

が分かる．

ゆえに，族 $\{\bar{\varphi}_{1,\varepsilon}\}$ の $H^1(\Lambda^1 M, g)$ における一様有界性が分かるので，3.5 節の Proposition 3.5.1 の証明が再度適用できて，その H^1 弱収束の極限 $\bar{\varphi}_1$ が存在し，さらに，これが (M, g) の eigen 1-form になることが分かる．よって，残りはこの極限 $\bar{\varphi}_1$ が co-exact 1-form であることを示せばよい．

まず，$\bar{\varphi}_1$ が co-closed であること示す．それには，(M, g) の exact 1-form と直交していることを示せばよい．任意の関数 $f \in C_0^\infty(M \setminus \{P, Q\})$ に対して，$\varphi_{1,\varepsilon}$ は co-closed なので，

$$
\begin{aligned}
(\bar{\varphi}_1, df)_{L^2(\Lambda^1 M)} &= \lim_{\varepsilon \to 0} (\bar{\varphi}_{1,\varepsilon}, df)_{L^2(\Lambda^1 M)} = \lim_{\varepsilon \to 0} (\varphi_{1,\varepsilon}, df)_{L^2(\Lambda^1 M)} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} (\delta \varphi_{1,\varepsilon}, f)_{L^2(M)} = 0
\end{aligned}
$$

である．そして，埋め込み $C_0^\infty(M \setminus \{P, Q\}) \subset H^1(M, g)$ は dense より，結局，任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$
(\bar{\varphi}_1, df)_{L^2(\Lambda^1 M)} = 0,
$$

すなわち，$\bar{\varphi}_1$ は co-closed である．

次に，$\bar{\varphi}_1$ が co-exact を示すためには (M, g) の harmonic 1-form と直交することを言えばよい．しかし，これは Proposition 3.7.2 より固有値は 0 に収束しないので，極限は harmonic 1-form と直交することが分かる．

こうして，すべての証明が完了する． □

参考文献

[A-86] C. Anné, Perturbation du $X - TUB^\varepsilon Y$ (conditions de Neumann), Séminarie de Théorie Spectre et Géométrie, Année 1985–1986, 4, Univ. Grenoble, (1986), 17–23.

[A-87] ____, Spectre du laplacien et écracement d'anses, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (4), **20** (1987), 271–280.

[A-99] ____, Correction of my paper "Spectre du laplacien et écracement d'anses", http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/ anne/ (1999).

[A-95] ____, A note on the generalized dumbbell problem, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 2595–2599.

[AC-93] C. Anné et B. Colbois, Opérateur de Hodge–Laplace sur des variétés compactes privées d'un nombre fini de boules, J. Func. Anal. **115** (1993), 143–160.

[AC-95] ____, Spectre du Laplacien agissant sur les p-formes différentielles et écrasement d'anses, Math. Ann. **303** (1995), 545–573.

[Ct-87] G. Courtois, Comportement du spectre d'une variété riemannienne compacte sous perturbation topologique par excision d'un domaine, Thèse, Institut Fourier, Grenoble (1987).

[GM-75] S. Gallot et D. Meyer, Opérateur de courbure et Laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne, J. Math. pures appl. **54** (1975), 259–284.

[MG-93] J. McGowan, The p-spectrum of the Laplacian on compact hyperbolic three manifolds, Math. Ann. **279** (1993), 729–745.

[Mo-66] C. B. Morrey, Jr. Multiple Integrals in the Calculus of Variations, Springer-Verlag, (1966).

[RS-71] D. B. Ray and I. M. Singer, R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds, Adv. in Math. **7** (1971), 145–210.

[RT-75] J. Rauch and M. Taylor, Potential and scattering theory on wildly perturbed domains, J. Func. Anal. **18** (1975), 27–59.

[RR-92] M. Renardy and R. C. Rogers, An Introduction to Partial Differential Equations, Texts in Applied Math. 13, Springer-Verlag (1992).

[Sc-95] G. Schwarz, Hodge decomposition — a method for solving boundary value problems, Springer, Lecture Notes No. 1607 (1995).

[Su-80] 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版会, (1980).

[T-01] J. Takahashi, Collapsing of connected sums and the eigenvalues of the Laplacian, preprint, to appear in J. Geom. Phys. (2001).

東京大学大学院数理科学研究科
〒 153–8914，東京都目黒区駒場 3–8–1
e-mail: junya@ms.u-tokyo.ac.jp

第 1 版： 2001 年 9 月 11 日
第 2 版： 2001 年 9 月 22 日