

体積一定下での Hodge-Laplacian と rough Laplacian の小さい固有値

高橋 淳也

(Junya Takahashi)

東北大学情報科学研究科

2022 年 3 月 31 日

準備と記法

本講演は、Colette Anné 氏 (フランス Nantes 大学) との共同研究 [AT22] に基づく.

準備

(M^m, g) : m 次元, 連結向きづけられた閉 Riemann 多様体

$\Delta = d\delta + \delta d$: p -形式に作用する Hodge-Laplacian (δ は d の L^2 -adjoint)

$\lambda_k^{(p)}(M, g)$: Δ の (重複度込みの) 正の第 k 固有値

このとき, Δ のスペクトルは, 非負の重複度有限の固有値からなる:

$$\underbrace{0 = \cdots = 0}_{b_p(M)} < \lambda_1^{(p)}(M, g) \leq \lambda_2^{(p)}(M, g) \leq \cdots \leq \lambda_k^{(p)}(M, g) \leq \cdots \longrightarrow \infty.$$

ここで, $b_p(M) = \dim \operatorname{Ker}(\Delta)$: p 次 Betti 数

• 固有値 0 の重複度は, 計量 g によらない **位相不変量**
(Hodge-Kodaira-de Rham).

$\bar{\Delta} = \nabla^* \nabla : p$ -形式に作用する rough Laplacian (粗 Laplacian)
(∇^* は ∇ の L^2 -adjoint)

$\bar{\lambda}_k^{(p)}(M, g) : \bar{\Delta}$ の (重複度込みの) 正の第 k 固有値

$\bar{\Delta}$ のスペクトルも, 非負の重複度有限の固有値からなる:

$$0 = \cdots = 0 < \bar{\lambda}_1^{(p)}(M, g) \leq \bar{\lambda}_2^{(p)}(M, g) \leq \cdots \leq \bar{\lambda}_k^{(p)}(M, g) \leq \cdots \longrightarrow \infty.$$

- 固有値 0 の重複度は $\dim \text{Ker}(\nabla)$, 平行 p -形式の空間の次元.
これは, 計量 g に依存する (計量を動かせば, 平行形式の存在も変わる).

[注意]

- Weitzenböck の公式 $\Delta = \bar{\Delta} + F_p$ により, Hodge-Laplacian Δ と rough Laplacian $\bar{\Delta}$ の差は Weitzenböck 曲率テンソル F_p であるが, この曲率の制御には強い条件が必要. (従って, 特別な状況以外, 一方から他方の固有値の性質が直ぐに分かるということはない).

考える問題

素朴な問題

閉多様体 M を固定し、その上の Riemann 計量 g を動かしたとき、第 k 固有値 $\lambda_k^{(p)}(M, g)$ の振る舞いはどうなるか？

ただし、Riemann 計量 g のスカラー $a > 0$ 倍に対して固有値は

$$\lambda_k^{(p)}(M, ag) = a^{-1} \lambda_k^{(p)}(M, g), \quad \bar{\lambda}_k^{(p)}(M, ag) = a^{-1} \bar{\lambda}_k^{(p)}(M, g)$$

となるので、動かす Riemann 計量は**体積が 1** と正規化しておく．

体積を正規化した問題

閉多様体 M 上の**体積 1** の Riemann 計量を動かしたとき、正の第 k 固有値 $\lambda_k^{(p)}(M, g)$, $\bar{\lambda}_k^{(p)}(M, g)$ の上限, 下限はどうなるか？

既知の結果

• 上限について

- ① rough Laplacian の場合は、すべての $0 \leq p \leq m$ に対して第 k 固有値 $\bar{\lambda}_k^{(p)}(M, g)$ の上限は ∞ である (Colbois-Dodziuk [CD94], Colbois-Maerten [CM10]).
- ② Hodge-Laplacian の場合は、 $2 \leq p \leq m - 2$ のときも第 k 固有値 $\lambda_k^{(p)}(M, g)$ の上限は ∞ である (Gentile-Pagliara [GP95]) .
- ③ しかし、残る $p = 1, m - 1$ (Hodge dual なので $p = 1$ が本質的) のときは未解決である (Berger problem for 1-forms) .

• 下限について

- ① $p = 0, 1, m - 1, m$ に対する rough Laplacian の第 k 固有値の下限は 0 である (Colbois-Maerten [CM10]) .
- ② 一部の次元 m と次数 p を除いた Hodge-Laplacian の第 k 固有値の下限は 0 である (Guerini [Gu04], Jammes [Ja11]) .

今回、我々は残る次数 $2 \leq p \leq m - 2$ の場合に対しても rough Laplacian の第 k 固有値の下限は 0 であることを示した.

主結果 … 球面の場合

まず、 m 次元球面 $\mathbb{S}^m$ の場合に目標の Riemann 計量の族を構成する。

定理 1 (Anné and T. [AT22])

次元 $m \geq 2$ と次数 p ($1 \leq p \leq m-1$) を与えたとき、 m 次元球面 $\mathbb{S}^m$ 上に体積 1 で **非負の断面曲率**をもつ Riemann 計量の族 $\{\bar{g}_{p,L}\}_{L>0}$ で、任意の $k \geq 1$ に対して

$$\bar{\lambda}_k^{(p)}(\mathbb{S}^m, \bar{g}_{p,L}) \longrightarrow 0, \quad \lambda_k^{(p)}(\mathbb{S}^m, \bar{g}_{p,L}) \longrightarrow 0 \quad (L \longrightarrow \infty)$$

を満たすものが存在する。

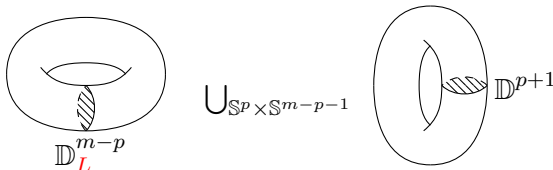
[補足] さらに、Hodge-Laplacian の正の固有値に対しては、パラメータ L に関する下からの評価も与えた（詳細な記述は [AT22] を参照）。とくに、 $q \neq 1, p, p+1, m-p-1, m-p, m-1, m$ のとき、

$$\lambda_k^{(q)}(\mathbb{S}^m, \bar{g}_{p,L}) \geq C(AL + B)^{\frac{2}{m}} \longrightarrow \infty \quad (L \longrightarrow \infty).$$

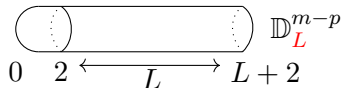
定理 1 の計量の構成方法 (概略)

与えられた次数 p ($1 \leq p \leq m-1$) に対して, $\mathbb{S}^m$ を p 次元手術を施して分解する:

$$\mathbb{S}^m = (\mathbb{S}^p \times \mathbb{D}_{\mathbf{L}}^{m-p}) \cup_{\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^{m-p-1}} (\mathbb{D}^{p+1} \times \mathbb{S}^{m-p-1}).$$



次に, $\mathbb{S}^p \times \mathbb{D}_{\mathbf{L}}^{m-p}$ の $(m-p)$ 次元閉ディスク $\mathbb{D}_{\mathbf{L}}^{m-p}$ に, $L \rightarrow \infty$ のとき, 下図のような細長いシリンダーとなるような計量を入れる. この計量は **断面曲率が非負である**.



最後に, 体積で正規化したものが $\bar{g}_{p,L}$ である (断面曲率の非負性は保たれる).

□

一般の多様体の場合

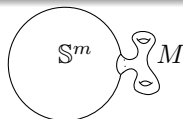
定理 1 で得られた球面を任意の閉多様体 M に貼り付ける（連結和をとる）ことで（貼り付け定理 [AT12], [AT22] を用いる），一般の m 次元多様体 M^m 上にも同様の性質を満たす Riemann 計量の存在が示せる．ただし，貼り付けにおいて，断面曲率が非負という性質は崩れてしまう．

定理 2 (Anné and T. [AT22])

M^m を任意の m ($m \geq 2$) 次元の連結向き付けられた閉多様体とする．次数 p ($1 \leq p \leq m-1$) を固定し，任意の $\varepsilon > 0$ と $k \geq 1$ に対し， M 上の体積 1 の Riemann 計量 $\bar{g}_{p,\varepsilon}$ で

$$\bar{\lambda}_k^{(p)}(M, \bar{g}_{p,\varepsilon}) < \varepsilon, \quad \lambda_k^{(p)}(M, \bar{g}_{p,\varepsilon}) < \varepsilon$$

を満たすものが存在する．



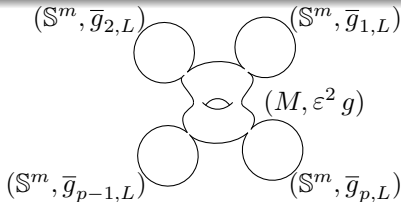
さらに, $p = 1, 2, \dots, m - 1$ に対し, 定理 1 で得られた $m - 1$ 個の球面 $(\mathbb{S}^m, \bar{g}_{1,L}), (\mathbb{S}^m, \bar{g}_{2,L}), \dots, (\mathbb{S}^m, \bar{g}_{m-1,L})$ を, M に貼り付けることによって, 次数 p に依らない M 上の計量 $\bar{g}_\varepsilon$ を得ることが出来る.

定理 3 (Anné and T. [AT22])

M^m を任意の m ($m \geq 2$) 次元の連結向き付けられた閉多様体とする.
 任意の $\varepsilon > 0$ と $k \geq 1$ に対し, M 上の体積 1 の Riemann 計量 $\bar{g}_\varepsilon$ で,
 すべての $p = 1, 2, \dots, m - 1$ に対し

$$\bar{\lambda}_k^{(p)}(M, \bar{g}_\varepsilon) < \varepsilon, \quad \lambda_k^{(p)}(M, \bar{g}_\varepsilon) < \varepsilon$$

を満たすものが存在する.



参考文献

- [AT12] C. Anné and J. Takahashi, p -spectrum and collapsing of connected sums, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), 1711–1735.
- [AT22] C. Anné and J. Takahashi, Small eigenvalues of the rough and Hodge Laplacians under fixed volume, arXiv:2106.12814, to appear in Ann. Fac. Sci. Toulouse, (2022). [pdf](#) (ダウンロード可能)
- [CD94] B. Colbois and J. Dodziuk, Riemannian metrics with large λ_1 , Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), 905–906.
- [CM10] B. Colbois and D. Maerten, Eigenvalue estimate for the rough Laplacian on differential forms, Manuscripta Math. **132** (2010), 399–413.
- [GP95] G. Gentile and V. Pagliara, Riemannian metrics with large first eigenvalue on forms of degree p , Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 3855–3858.
- [Gu04] P. Guerini, Prescription du spectre du laplacien de Hodge-de Rham, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **37** (2004), 270–303.
- [Ja11] P. Jammes, Prescription de la multiplicité des valeurs propres du laplacien de Hodge-de Rham, Comment. Math. Helv. **86** (2011), 967–984.

ご質問等は，高橋淳也 t-junya@tohoku.ac.jp まで。