

体積一定下での Hodge-Laplacian と rough Laplacian の小さい固有値

高橋 淳也 (東北大学情報科学研究科)*¹

Colette Anné (Université de Nantes)*²

m 次元の連結向きづけられた閉 Riemann 多様体 (M^m, g) 上の p -形式に作用する Hodge-Laplacian $\Delta = d\delta + \delta d$ の (重複度込みの) **正**の第 k 固有値を $\lambda_k^{(p)}(M, g)$ とし, rough Laplacian $\bar{\Delta} = \nabla^* \nabla$ の正の第 k 固有値を $\bar{\lambda}_k^{(p)}(M, g)$ とする.

我々は閉多様体 M を固定し, その上の Riemann 計量 g を動かした際の第 k 固有値の振る舞いについて考えたい. ただし, Riemann 計量 g のスカラー $a > 0$ 倍に対して固有値はともに $\lambda_k^{(p)}(M, ag) = a^{-1} \lambda_k^{(p)}(M, g)$, $\bar{\lambda}_k^{(p)}(M, ag) = a^{-1} \bar{\lambda}_k^{(p)}(M, g)$ と変換されるので, 動かす Riemann 計量は**体積が 1**と正規化しておく. このとき, M 上の体積 1 の Riemann 計量を動かした際の正の第 k 固有値 $\lambda_k^{(p)}(M, g)$, $\bar{\lambda}_k^{(p)}(M, g)$ の上限と下限に興味がある.

まず上限については, rough Laplacian の場合は, すべての $0 \leq p \leq m$ に対して第 k 固有値の上限は ∞ である [CD94], [CM10]. また, Hodge-Laplacian の場合は, $2 \leq p \leq m-2$ のときも上限は ∞ であるが [GP95], 残る $p = 1, m-1$ のときは不明である.

一方, 下限については, Colbois-Maerten [CM10] は, 多様体を細く伸ばすことにより, $p = 0, 1, m-1, m$ に対する rough Laplacian の第 k 固有値の下限は 0 であることを示した. すなわち, 任意の $m \geq 2$ 次元の閉多様体 M に対して, M 上に体積 1 の Riemann 計量の族 $\{\bar{g}_L\}_{L>0}$ で, $p = 0, 1, m-1, m$ と $k \geq 1$ に対して $\bar{\lambda}_k^{(p)}(M, \bar{g}_L) \rightarrow 0$ ($L \rightarrow \infty$) となるものを構成した.

今回, 我々は残る次数 $2 \leq p \leq m-2$ の場合に対しても rough Laplacian の第 k 固有値の下限は 0 であることを示した. さらに, $1 \leq p \leq m-1$ の場合の Hodge-Laplacian の第 k 固有値の下限も 0 であることも示した.

証明方法は, まず, m 次元球面 S^m の場合に目標の Riemann 計量の族を構成する.

定理 1 ([AT21]). 次元 $m \geq 2$ と次数 p ($1 \leq p \leq m-1$) を与えたとき, m 次元球面 S^m 上に体積 1 で**非負の断面曲率**をもつ Riemann 計量の族 $\{\bar{g}_{p,L}\}_{L>0}$ で, 任意の $k \geq 1$ に対して

$$\bar{\lambda}_k^{(p)}(S^m, \bar{g}_{p,L}) \rightarrow 0, \quad \lambda_k^{(p)}(S^m, \bar{g}_{p,L}) \rightarrow 0 \quad (L \rightarrow \infty)$$

を満たすものが存在する.

さらに, Hodge-Laplacian の正の固有値に対しては, パラメーター L に関する下からの評価も与えた.

本研究は科研費 (課題番号:16K05117) の助成を受けたものである.

*¹ 〒 987-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-3-09

e-mail: t-junya@tohoku.ac.jp

*² e-mail: colette.anne@univ-nantes.fr

次に、球面で得られた Riemann 計量を任意の閉多様体 M に貼り付けることによって (貼り付け定理 [AT12], [AT21] を使用), 一般の m 次元多様体 M^m 上にも同様の性質を満たす Riemann 計量の存在が示せる. ただし, 貼り付けにおいて, 断面曲率が非負という性質は崩れてしまう.

定理 2 ([AT21]). M^m を任意の m ($m \geq 2$) 次元の連結向き付けられた閉多様体とする. 次数 p ($1 \leq p \leq m-1$) を固定し, 任意の $\varepsilon > 0$ と $k \geq 1$ に対し, M 上の体積 1 の Riemann 計量 $\bar{g}_{p,\varepsilon}$ で

$$\bar{\lambda}_k^{(p)}(M, \bar{g}_{p,\varepsilon}) < \varepsilon, \quad \lambda_k^{(p)}(M, \bar{g}_{p,\varepsilon}) < \varepsilon$$

を満たすものが存在する.

注意 3. (1) 定理 1, 2 の Riemann 計量 $\bar{g}_{p,L}$, $\bar{g}_{p,\varepsilon}$ は微分形式の次数 p に依存すること
に注意.

(2) Hodge-Laplacian の固有値の下限については Guerini [Gu04], Jammes [Ja11] の結果 (ただし, 一部の次元と次数を除く) から分かるが, 彼らが構成した Riemann 計量の列は, 球面上でも断面曲率が $\pm\infty$ に発散する. 一方, 定理 1 で構成した球面上の Riemann 計量の族は**断面曲率が非負**である.

(3) 定理 1 の球面上の Riemann 計量の族では, 直径は ∞ に発散する. なお, 断面曲率と体積が下に有界で, 直径も有界の下では, Hodge-Laplacian の正の固有値の下限は正であると予想されている (Lott [Lo04]).

参考文献

- [AT12] C. Anné and J. Takahashi, p -spectrum and collapsing of connected sums, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), 1711–1735.
- [AT21] C. Anné and J. Takahashi, Small eigenvalues of the rough and Hodge Laplacians under fixed volume, arXiv:2106.12814, (2021).
- [CD94] B. Colbois and J. Dodziuk, Riemannian metrics with large λ_1 , Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), 905–906.
- [CM10] B. Colbois and D. Maerten, Eigenvalue estimate for the rough Laplacian on differential forms, Manuscripta Math. **132** (2010), 399–413.
- [GP95] G. Gentile and V. Pagliara, Riemannian metrics with large first eigenvalue on forms of degree p , Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 3855–3858.
- [Gu04] P. Guerini, Prescription du spectre du laplacien de Hodge-de Rham, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **37** (2004), 270–303.
- [Ja11] P. Jammes, Prescription de la multiplicité des valeurs propres du laplacien de Hodge-de Rham, Comment. Math. Helv. **86** (2011), 967–984.
- [Lo04] J. Lott, Remark about the spectrum of the p -form Laplacian under a collapse with curvature bounded below, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 911–918.