

断面曲率が下に有界な場合の Hodge-Laplacian の 小さい固有値

高橋 淳也 (東北大学情報科学研究科)*¹

Colette Anné (Université de Nantes)*²

m 次元の連結向き付けられた閉 Riemann 多様体 (M^m, g) 上の p -形式に作用する Hodge-Laplacian $\Delta = d\delta + \delta d$ の (重複度込みの) 正の第 k 固有値を $\lambda_k^{(p)}(M, g)$ とする. スペクトル幾何学の重要な問題の1つは, 固有値 $\lambda_k^{(p)}(M, g)$ の上下からの評価を (M^m, g) の幾何学的量を用いて記述することであるが, Hodge-Laplacian の場合は, まだこの問題に対する最良な結果が得られていない状況である.

我々は 2022 年 3 月の学会において, 以下のような研究成果を発表した [AT22a, AT22b] (ただし, 対面開催は中止のため, アブストラクトとスライドのみによる発表).

定理 1 ([AT22a, AT22b]). M^m を任意の m ($m \geq 2$) 次元の連結向き付けられた閉多様体とし, 次数 p ($1 \leq p \leq m-1$) を固定する. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ と $k \geq 1$ に対して, M 上の体積 1 の Riemann 計量 $\bar{g}_{p,\varepsilon}$ で $\lambda_k^{(p)}(M, \bar{g}_{p,\varepsilon}) < \varepsilon$ を満たすものが存在する.

特に, $M = \mathbb{S}^m$, m 次元球面のとき, この Riemann 計量 $\bar{g}_{p,\varepsilon}$ を断面曲率が非負であるように取ることが出来る.

この計量族は以下の様にして構成できる. まず, m 次元球面 $\mathbb{S}^m$ 上に上述の性質を持つ Riemann 計量の 1-パラメーター族を構成する. 具体的には, m 次元球面を

$$\mathbb{S}^m \cong (\mathbb{S}^p \times \mathbb{D}_L^{m-p}) \cup (\mathbb{D}^{p+1} \times \mathbb{S}^{m-p-1})$$

と p 次元手術のように分解して, $m-p$ 次元 disk $\mathbb{D}_L^{m-p}$ の半径 L を細く伸ばすと得られる. 特に, 変形の間で断面曲率の非負性を保つようにできる.

次に, この計量を備えた球面 $\mathbb{S}^m$ を任意の m 次元閉多様体 M に旨く貼り付けると, 一般の場合の Riemann 計量の列が得られる. ただし, この貼り付けにおいて断面曲率の有界性は保たれず, 曲率が上下に発散してしまうのが課題であった.

そこで, 一般の多様体の場合でも, 曲率の有界性を保った変形を構成することを試みた. ただし, 断面曲率が非負となる Riemann 計量が存在するためには, 閉多様体に位相的な制約があるので (例えば, Bochner の消滅定理より, Betti 数は $b_1(M) \leq b_1(\mathbb{T}^m) = m$ でなくてはならない), 曲率の条件を断面曲率が下に有界という条件に置き換えて考える. このとき, 得られた結果が今回発表する主定理である.

定理 2 ([AT23]). M^m を任意の m ($m \geq 2$) 次元の連結向き付けられた閉多様体とし, 次数 p ($0 \leq p \leq m$) を固定する. このとき, 任意の $k \geq 1$ に対して, M 上の体積 1 か

*¹ 〒 987-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-3-09

e-mail: t-junya@tohoku.ac.jp

*² e-mail: colette.anne@univ-nantes.fr

断面曲率が下に有界 $K \geq -\kappa^2$ となる Riemann 計量の 1-パラメーター族 $\{\bar{g}_{p,L}\}_{L \geq 1}$ で

$$\lambda_k^{(p)}(M, \bar{g}_{p,L}) \longrightarrow 0 \quad (L \longrightarrow \infty)$$

となるものが存在する.

この定理も構成的に示す. M 内に埋め込まれた p 次元球面 S^p ($0 \leq p \leq m-2$) で, 法束が自明な物を取る. このとき, 管状近傍 $S^p \times \mathbb{D}^{m-p}$ に, 定理 1 の球面の場合に構成した断面曲率が非負である Riemann 計量の族を導入する.

次に, 管状近傍の外側に, この計量を滑らかに伸ばす. ここで, 管状近傍の外側の計量は, パラメーター L に依らないようにする. この部分で, 断面曲率の下への有界性を保ったまま旨く計量を貼り合わせる所が技術的なポイントとなる.

最後に, $p = m-1, m$ の場合は, Hodge duality より, $p = 1, 0$ の場合に帰着出来るので, すべての p の場合について示される. $\square$

今回得られた Riemann 計量の構成方法は, 前回の方法に比べると貼り合わせの部分やや複雑ではあるが, 固有値の貼り付け定理を必要としないため, 証明が大幅に簡略化されたことも利点である.

注意 3. (i) 定理 2 の Riemann 計量 $\bar{g}_{p,L}$ は次数 p に依存するが, 埋め込まれた球面を $S^0, S^1, \dots, S^{m-2}$ と $m-1$ 個考えて同じ構成法を行えば, Riemann 計量は次数 p に依らないように構成できる.

(ii) 定理 1, 2 のいずれの Riemann 計量の族でも, 直径は無限大に発散する. そこで直径が有界な場合が気になるが, この場合には次の Lott による予想がある.

予想 4 (Lott [Lo04]). 断面曲率と体積が下に有界で, 直径も有界のもとでは (このとき, 非崩壊となる), すべての p に対して Hodge-Laplacian の正の固有値の下限は正であろう.

現在, この予想は正しいと思われる. 実際, Perelman が証明したと主張している Lipschitz 安定性定理 (証明は未発表) が正しい場合, Lott の予想は肯定的となる.

では, 断面曲率を Ricci 曲率に弱めた場合はどうなるか? という問題が考えられるが, こちらに関しては何も分かっていない.

参考文献

- [AT22a] C. Anné and 高橋淳也, 体積一定下での Hodge-Laplacian と rough Laplacian の小さい固有値, 日本数学会 2022 年度年会, 幾何学学科会アブストラクト, (2022), 145–146.
- [AT22b] C. Anné and J. Takahashi, Small eigenvalues of the rough and Hodge Laplacians under fixed volume, to appear in Ann. Fac. Sci. Toulouse, (2022). arXiv:2106.12814, hal-03268574.
- [AT23] C. Anné and J. Takahashi, Small eigenvalues of the Hodge-Laplacian with sectional curvature bounded below, (2023), in preparation.
- [Lo04] J. Lott, Remark about the spectrum of the p -form Laplacian under a collapse with curvature bounded below, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 911–918.