# 重積分の変数変換の公式（解析学 B）

（担当：高橋淳也）

## 1　重積分の変数変換の公式

重積分の変数変換の公式において，Jacobian（ヤコビアン，関数行列式）の絶対値が現れる理由を説明する．まず，重積分の変数変換の公式は以下の通りである．

**定理 1.1** (重積分の変数変換)**.** $E \subset \mathbb{R}^2$ を $(u,v)$ 平面，$D \subset \mathbb{R}^2$ を $(x,y)$ 平面の面積確定な有界閉集合とする．$C^1$ 級写像 $\Phi : E \longrightarrow D$, $E \ni (u,v) \mapsto \Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) \in D$ が次の $(1), (2)$ を満たすとする：

(1) $\Phi : E \longrightarrow D$ は全単射（すなわち，$1:1$ かつ $\Phi(E) = D$）；

(2) Jacobian $J(\Phi)(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \neq 0$ $(\forall(u,v) \in E)$.

このとき，$D$ 上の連続関数 $f(x,y)$ に対して，次の変数変換の公式が成立する：

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv. \tag{$\sharp$}$$

ここで，Jacobian（ヤコビアン，ヤコビ行列式）は，

$$J(\Phi) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} := \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

で定まる行列式である．

なお，条件 $(1), (2)$ は，

『 $E$ または $D$ の面積 $0$ の集合を除いた集合上で成立する』

と弱めることが出来る．これは面積 $0$ での値は積分に反映されないためである．

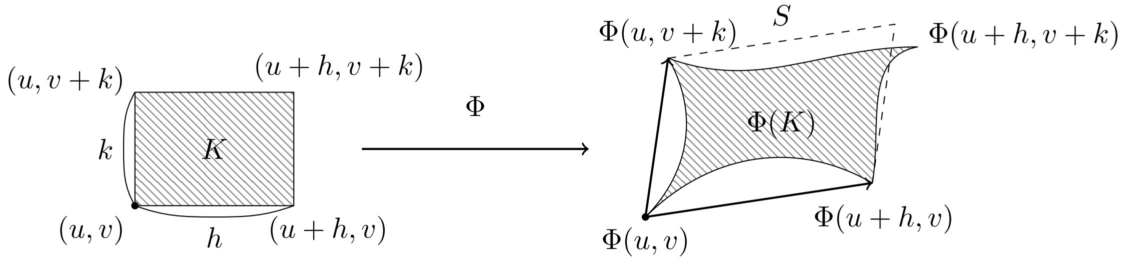


Figure 1: 微小な長方形の変換

以下， 積分の変数変換の公式（定理 1.1）の『証明の概略』を記す．特に，Jacobian の絶対値が現れる理由を中心に説明する.（厳密な証明は大変難しい）.

**証明の概略.** $(u,v)$ 平面内の微小な長方形 $K$（辺の長さはそれぞれ $h,k$）とその $\Phi$ による像 $\Phi(K)$ の面積比を求めよう.

まず，$(x,y)$ 平面内の 2 つのベクトル

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Phi(u,v)\Phi(u+h,v)} &= \Big(x(u+h,v)-x(u,v),\, y(u+h,v)-y(u,v)\Big),\\ \overrightarrow{\Phi(u,v)\Phi(u,v+k)} &= \Big(x(u,v+k)-x(u,v),\, y(u,v+k)-y(u,v)\Big)\end{aligned} \tag{1.1}$$

によって張られる平行 4 辺形 $S$ の面積を考える（図 1 参照）.

$\Phi$ は $C^1$ 級なので，各成分に平均値の定理を適用できる．$u$ 方向についての平均値の定理より，ある $0<\theta_1,\theta_2<1$ が存在して，

$$\begin{cases} x(u+h,v)-x(u,v) = x_u(u+\theta_1 h,v)h, \\ y(u+h,v)-y(u,v) = y_u(u+\theta_2 h,v)h. \end{cases}$$

$v$ 方向も同様にして，ある $0<\eta_1,\eta_2<1$ が存在して，

$$\begin{cases} x(u,v+k)-x(u,v) = x_v(u,v+\eta_1 k)k, \\ y(u,v+k)-y(u,v) = y_v(u,v+\eta_2 k)k. \end{cases}$$

よって，平行 4 辺形 $S$ の面積 $m(S)$ は，(1.1) の 2 つのベクトルからなる行列式の絶対値なので（線型代数の行列式の幾何学的意味），

$$\begin{aligned} m(S) &= \left|\det\begin{pmatrix} x(u+h,v)-x(u,v) & x(u,v+k)-x(u,v) \\ y(u+h,v)-y(u,v) & y(u,v+k)-y(u,v)\end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\det\begin{pmatrix} x_u(u+\theta_1 h,v)h & x_v(u,v+\eta_1 k)k \\ y_u(u+\theta_2 h,v)h & y_v(u,v+\eta_2 k)k\end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\det\begin{pmatrix} x_u(u+\theta_1 h,v) & x_v(u,v+\eta_1 k) \\ y_u(u+\theta_2 h,v) & y_v(u,v+\eta_2 k)\end{pmatrix}\right| \cdot hk. \end{aligned}$$

ゆえに，$m(S)$ と $m(K)=hk$ の面積比は，$(h,k)\longrightarrow(0,0)$ のとき，$\Phi$ が $C^1$ 級であることから，

$$\begin{aligned} \frac{m(S)}{m(K)} &= \left|\det\begin{pmatrix} x_u(u+\theta_1 h,v) & x_v(u,v+\eta_1 k) \\ y_u(u+\theta_2 h,v) & y_v(u,v+\eta_2 k)\end{pmatrix}\right| \\ &\longrightarrow \left|\det\begin{pmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v)\end{pmatrix}\right| = |J(\Phi)(u,v)| \end{aligned} \tag{1.2}$$

となる（こうして，$\Phi$ の Jacobian の絶対値が現れる）.

また，$(h,k)\longrightarrow(0,0)$ のとき，平行 4 辺形 $S$ と像 $\Phi(K)$ が幾らでも近くなるので，面積も

$$\frac{m(\Phi(K))}{m(S)} \longrightarrow 1$$

となることが分かる（証明は難しい）．従って，$(h,k)\longrightarrow(0,0)$ のとき，

$$\frac{m(\Phi(K))}{m(K)} = \frac{m(\Phi(K))}{m(S)}\cdot\frac{m(S)}{m(K)} \longrightarrow |J(\Phi)(u,v)| \tag{1.3}$$

となる．

よって，$E$ を含む長方形の分割 $\Delta = \{K_{ij}\}_{i,j}$ と各小長方形内の点 $(u_{ij}, v_{ij}) \in K_{ij}$ に対して，重積分の定義と (1.3) から，

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dxdy &= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{\Phi(K_{ij})\cap D\neq\emptyset} f(\Phi(u_{ij}, v_{ij}))\,m(\Phi(K_{ij})) \\ &\underset{(1.3)}{=} \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{K_{ij}\cap E\neq\emptyset} f(\Phi(u_{ij}, v_{ij}))\,|J(\Phi)(u_{ij}, v_{ij})| m(K_{ij}) \\ &= \iint_E f(\Phi(u,v))\,|J(\Phi)(u,v)|\,dudv\end{aligned}$$

となるので，変数変換の公式が示された．

[注意] 最初の等号は，厳密には証明を必要とする事実である．実際，重積分の定義では，微小長方形の面積について和を取らなくてはならないが，右辺の $\Phi(K_{ij})$ たちはもはや長方形とは限らないからである．しかし，長方形でなくても一般の微小な面積確定な集合に分割しても，同じ形の式が成立することが知られている． □

**補足 1.2.** (*i*) 1 変数の積分の変数変換では Jacobian に絶対値は付かなかったが，重積分の場合に Jacobian に絶対値が付くのは，重積分の定義では向きを考慮していないためである．実際，重積分の定義に表れる Riemann 和の微小長方形の面積は，右手系 $(x,y)$ で測っても左手系 $(y,x)$ で測っても同じである（符号は付かない）．

例えば，$D = E$ が原点中心の円の場合，向きを反転させる変換 $\Phi : (y,x) \mapsto (x,y)$ の下でも面積（重積分）の値は不変であるが，Jacobian $J(\Phi) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ は負なので，Jacobian に絶対値を付ける必要がある（Jacobian が負ということが，向きを反転させるということに他ならない）．