不定積分の計算（解析学 A）

（担当：高橋淳也）

1　不定積分の計算

ここでは，不定積分の計算方法を述べる．一般に初等関数の不定積分は初等関数で書けるとは限らないが（例えば，$\int e^{-x^2}dx$ は初等関数で書けない），特別な場合に初等関数で書けるので，その場合について説明する．

以下，不定積分の計算では，すべて 積分定数は省略する．

1.1　有理関数の不定積分

$P(x), Q(x)$ を x の実係数多項式とるする．このとき，$R(x) := \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ と表される関数を**有理関数** (rational function)，または，**有理式***と言う．ここでは x の有理関数 $R(x)$ の不定積分を考えよう．

補題 1.1 (有理関数の部分分数分解)**.** 任意の有理関数 $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ は，次の $(A), (B), (C)$ の 3 つのタイプの式の有限和として表すことが出来る：

(A)　ax^k，k 次多項式，

(B)　$\dfrac{c}{(x-\alpha)^n}$，α は $Q(x) = 0$ の実数解，

(C)　$\dfrac{dx+e}{\big((x-a)^2+b^2\big)^m}$，$a+bi$ は $Q(x) = 0$ の実でない複素数解．

ただし，$a, b \neq 0, c, d, e, \alpha \in \mathbb{R}$, $k, n, m \in \mathbb{N}$（自然数）である．

証明の概略. この部分分数分解がどのようにして得られるかを説明する．

(1)　まず，有理関数 $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ （ただし，$Q(x)$ の最高次の係数は 1 にしておく）において，$(P(x)$ の次数$) \geq (Q(x)$ の次数$)$ ならば，$P(x)$ を $Q(x)$ で割ると，$R(x) = S(x) + \dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ と書ける．ただし，$S(x)$ は商，$P_1(x)$ は余りで，特に，$(P_1(x)$ の次数$) < (Q(x)$ の次数$)$ を満たす．この時，商 $S(x)$ は多項式なので，明らかに補題 1.1 の (A) のタイプの式の和である．

(2)　次に，有理関数 $R_1(x) := \dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ $\Big((P_1(x)$ の次数$) < (Q(x)$ の次数$)\Big)$ が $(B), (C)$ のタイプの式の和で書けることを示す．

まず，分母 $Q(x)$ を，代数学の基本定理『複素係数の n 次方程式多は，重複度も込めて n 個の複素数解を持つ』を用いることで，複素数の 1 次式の積に分解できる．さらに，$Q(x)$ は実係数多項式なので，複素共役に対して $\overline{Q(x)} = Q(\overline{x})$ となる．従って，x が $Q(x) = 0$

*多項式は整式ということがある．整数の比を有理数というのと同様に，整式の比を有理式という．

の解ならば，$\overline{x}$ も $Q(x)=0$ の解であり，逆もまた成立する．以上をまとめると，$Q(x)$ は次のように因数分解できる：

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\cdots(x-\alpha_k)^{n_k} \\ &\quad \cdot\Big\{(x-\beta_1)(x-\overline{\beta_1})\Big\}^{m_1}\cdots\Big\{(x-\beta_\ell)(x-\overline{\beta_\ell})\Big\}^{m_\ell}. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

ただし，

(*i*) $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ は，$Q(x)=0$ の重複度が $n_1,\ldots,n_k$ の異なる実数解である．

(*ii*) $\beta_1,\ldots,\beta_l$ は，$Q(x)=0$ の重複度が $m_1,\ldots,m_l$ の異なる虚数解である．

(*iii*) $\overline{\beta_1},\ldots,\overline{\beta_\ell}$ は，$Q(x)=0$ の重複度が $m_1,\ldots,m_\ell$ の異なる虚数解である．

ここで，(*ii*) と (*iii*) の解 β_j と $\overline{\beta_j}$ の重複度を込めた解の個数が一致するのは，$\overline{Q(x)}=Q(\overline{x})$ から従う．また，(*i*) は $\alpha_i=\overline{\alpha_i}$ となる解，すなわち，実数解である．

さて，実でない複素数解を $\beta_j=a_j+b_ji$ $(a_j,b_j\neq 0\in\mathbb{R}, j=1,\ldots,\ell)$ と書くと，その複素共役は $\overline{\beta_j}=a_j-b_ji$ なので，

$$(x-\beta_j)(x-\overline{\beta_j})=x^2-(\beta_j+\overline{\beta_j})x+\beta_j\,\overline{\beta_j}=x^2-2a_jx+(a_j^2+b_j^2)=(x-a_j)^2+b_j^2.$$

従って，(1.1.1) は，

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\cdots(x-\alpha_k)^{n_k} \\ &\quad \cdot\Big\{(x-a_1)^2+b_1^2\Big\}^{m_1}\cdots\Big\{(x-a_\ell)^2+b_\ell^2\Big\}^{m_\ell} \end{aligned}$$

と書ける．そこで，有理関数 $R_1(x)$ を分母 $Q(x)$ の各因数の分数の和に分解すると，

$$\begin{aligned} R_1(x) &= \frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{(x-\alpha_1)^{n_1}\cdots(x-\alpha_k)^{n_k}\Big((x-a_1)^2+b_1^2\Big)^{m_1}\cdots\Big((x-a_\ell)^2+b_\ell^2\Big)^{m_\ell}} \\ &= \sum_{j=1}^{k}\frac{c_{j,n_j}+c_{j,n_j-1}(x-\alpha_j)+c_{j,n_j-2}(x-\alpha_j)^2+\cdots+c_{j,1}(x-\alpha_j)^{n_j-1}}{(x-\alpha_j)^{n_j}} \\ &\quad +\sum_{j=1}^{\ell}\left\{\frac{\Big(d_{j,m_j}x+e_{j,m_j}\Big)+\Big(d_{j,m_j-1}x+e_{j,m_j-1}\Big)\Big((x-a_j)^2+b_j^2\Big)+\cdots}{\Big((x-a_j)^2+b_j^2\Big)^{m_j}}\right. \\ &\qquad\qquad \left.\frac{\cdots+\Big(d_{j,1}x+e_{j,1}\Big)\Big((x-a_j)^2+b_j^2\Big)^{m_j-1}}{}\right\} \\ &= \sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{c_{j,n_j}}{(x-\alpha_j)^{n_j}}+\frac{c_{j,n_j-1}}{(x-\alpha_j)^{n_j-1}}+\frac{c_{j,n_j-2}}{(x-\alpha_j)^{n_j-2}}+\cdots+\frac{c_{j,1}}{(x-\alpha_j)}\right\} \\ &\quad +\sum_{j=1}^{\ell}\left\{\frac{d_{j,m_j}x+e_{j,m_j}}{\Big((x-a_j)^2+b_j^2\Big)^{m_j}}+\frac{d_{j,m_j-1}x+e_{j,m_j-1}}{\Big((x-a_j)^2+b_j^2\Big)^{m_j-1}}+\cdots+\frac{d_{j,1}x+e_{j,1}}{\Big((x-a_j)^2+b_j^2\Big)}\right\} \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

と表せる．ただし，$c_{j,k}, d_{j,k}, e_{j,k}$ はすべて実数である．

この式 (1.1.2) は ($P_1(x)$ の次数) < ($Q(x)$ の次数) の場合の**部分分数分解** と呼ばれる．特に，補題 1.1 の $(B), (C)$ のタイプの式の和として表すことが出来る． □

補題 1.1 より，有理関数の不定積分は，$(A), (B), (C)$ のタイプの不定積分が分かれば良い．まず，(A) は多項式の積分なので，簡単に分かる．問題は $(B), (C)$ のタイプの式の積分だが，それは以下で与えられる．

定理 1.2 (有理関数の不定積分 (Leibniz, 1702, 1703))**.** *有理関数* $R_1(x) = \dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ *(($P_1(x)$ の次数) < ($Q(x)$ の次数)) の不定積分は，次の (I), (II), (III) のタイプの積分の和として表すことが出来る．従って，任意の有理関数の不定積分は，初等関数（とくに，有理関数，対数関数，逆正接関数）の和として表すことが出来る．*

$$\text{(I)} \qquad \int \frac{1}{(x-\alpha)^n} dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{n-1} \cdot \dfrac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} & (n \geq 2), \\ \log|x-\alpha\,| & (n = 1). \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \int \frac{x-a}{((x-a)^2+b^2)^m} dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{2(m-1)} \cdot \dfrac{1}{((x-a)^2+b^2)^{m-1}} & (m \geq 2), \\ \dfrac{1}{2} \log\Big((x-a)^2+b^2\Big) & (m = 1). \end{cases}$$

$$\text{(III)}\ I_m = \int \frac{1}{((x-a)^2+b^2)^m} dx = \begin{cases} \dfrac{1}{2(m-1)b^2} \left\{ \dfrac{x-a}{((x-a)^2+b^2)^{m-1}} \quad +(2m-3)I_{m-1} \right\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (m \geq 2), \\ \dfrac{1}{b} \tan^{-1}\left(\dfrac{x-a}{b}\right) \qquad\qquad (m = 1). \end{cases}$$

ここで，(III) の $m \geq 2$ の場合は，I_m についての漸化式を解いて求める．

証明. (I) この場合は既知である．

(II) この場合も既知である．すなわち，$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)^m} dx$ の形の積分なので，$t = f(x)$ とおけば，(I) の場合に帰着できる．

(III) $t = x - a$ と置くと，

$$I_m = \int \frac{1}{((x-a)^2+b^2)^m}\, dx \underset{t=x-a}{=} \int \frac{1}{(t^2+b^2)^m}\, dt.$$

ここで，I_m に対して部分積分を実行すれば，$\{I_m\}_m$ の漸化式を得る：

$$\begin{aligned} I_m = \int \frac{1}{(t^2+b^2)^m}\, dt &= \frac{t}{(t^2+b^2)^m} + \int \frac{2mt^2}{(t^2+b^2)^{m+1}}\, dt \\ &= \frac{t}{(t^2+b^2)^m} + 2m \left\{ \int \frac{t^2+b^2}{(t^2+b^2)^{m+1}}\, dt - \int \frac{b^2}{(t^2+b^2)^{m+1}}\, dt \right\} \\ &= \frac{t}{(t^2+b^2)^m} + 2m \left\{ \int \frac{1}{(t^2+b^2)^m}\, dt - b^2 \int \frac{1}{(t^2+b^2)^{m+1}}\, dt \right\} \\ &= \frac{t}{(t^2+b^2)^m} + 2mI_m - 2mb^2 I_{m+1}. \end{aligned}$$

よって，$I_{m+1} = \dfrac{1}{2mb^2}\left\{\dfrac{t}{(t^2+b^2)^m} + (2m-1)I_m\right\}$. この添え字を $m \mapsto m-1$ にずらせば，求める漸化式を得る：

$$\begin{aligned} I_m &= \frac{1}{2(m-1)b^2}\left\{\frac{t}{(t^2+b^2)^{m-1}} + (2m-3)I_{m-1}\right\} \\ &= \frac{1}{2(m-1)b^2}\left\{\frac{x-a}{((x-a)^2+b^2)^{m-1}} + (2m-3)I_{m-1}\right\}. \end{aligned}$$

実際に I_m を求めるには，この隣接 2 項間漸化式を解けばよい．そのためには，初項 I_1 の値が分かれば良いが，それは次のように様になる：

$$I_1 = \int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,dx \underset{t=x-a}{=} \int \frac{1}{t^2+b^2}\,dt = \frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{t}{b}\right) = \frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x-a}{b}\right).$$

□

1.2 3 角関数の有理関数の不定積分

この節では 3 角関数 $\sin\theta, \cos\theta$ からなる有理関数の不定積分 $\displaystyle\int R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$ の計算方法を見よう．なお，一般の 3 角関数の無理関数（根号を含む関数）の不定積分は初等関数で記述できない（例えば，$\sqrt{3 \text{ 次式}}$ など）．

$P(x,y), Q(x,y)$ を 2 変数 x, y の実係数多項式とし，2 変数の有理関数 $R(x,y) := \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ とする．

定理 1.3 (3 角関数の有理関数の不定積分)**.** $R(x,y)$ を x, y に関する有理関数とする．このとき，不定積分 $\displaystyle\int R(\sin\theta, \cos\theta)\,d\theta$ は，$t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ $(-\pi < \theta < \pi)$ と置くことで，t についての有理関数の不定積分に帰着できる．実際，

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad d\theta = \frac{2}{1+t^2}\,dt \tag{1.2.1}$$

となるので，

$$\int R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt \tag{1.2.2}$$

と t の有理関数の不定積分となる．従って，前節で述べた有理関数の不定積分の計算方法（補題 1.1 と定理 1.2）によりこの不定積分が計算できる．

注意 1.4. 3 角関数の有理関数の不定積分は，この定理 1.3 によって必ず計算できるが，一般にこの計算は複雑になることが多い．そのため，問題によっては別の変数変換を行った方が簡単に計算できることもある．例えば，$R(x,y) = R(-x,-y)$ を満たす有理関数の場合は，$t = \tan\theta$ と置くなど，他にも色々な場合がある．

証明. 計算するだけである．変数変換 $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ を行えば，

$$\frac{dt}{d\theta} = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)' = \frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2}\left(\tan^2\frac{\theta}{2} + 1\right) = \frac{t^2+1}{2}$$

より，$d\theta = \dfrac{2}{t^2+1}\,dt$ が分かる．

次に，$\cos\theta$ は加法定理と $\tan^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ より，

$$\cos\theta = \cos\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = \frac{2}{\tan^2\frac{\theta}{2}+1} - 1 = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

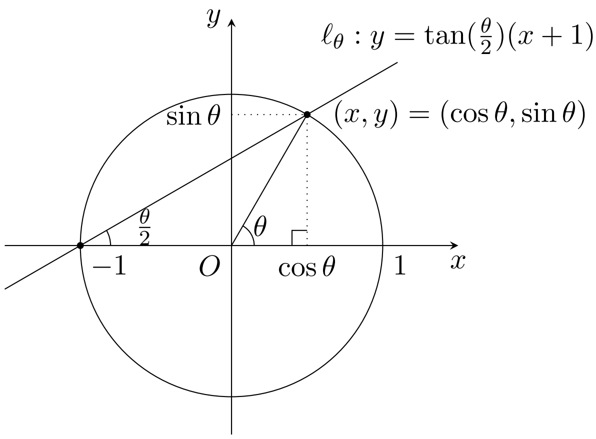
同様にして，$\sin\theta$ は，

$$\sin\theta = \sin\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} = 2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2} = 2\tan\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{\tan^2\frac{\theta}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1}.$$

□

変数変換の幾何学的な意味

この変数変換 $t=\tan\frac{\theta}{2}$ の幾何学的な意味を考えてみよう．3 角関数を有理関数表示するためには，単位円上の点 $(x,y)=(\sin\theta,\cos\theta)$ のパラメーターの有理関数表示が求められれば良い．そのため，点 $(-1,0)$ と点 $(\sin\theta,\cos\theta)$ を通る直線を考えると，この直線 ℓ_θ の傾きが $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ となる．実際，点 $(1,0)$ と点 $(\sin\theta,\cos\theta)$ に対する弧の中心角は θ なので，その円周角は $\dfrac{\theta}{2}$ である．従って，直線 ℓ_θ の傾きは $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ となる（下図参照）．



このとき，単位円周上の点 $(x,y)=(\sin\theta,\cos\theta)$ を t を用いて表すには，単位円周 $x^2+y^2=1$ と直線 $\ell_\theta : y=t(x+1)$ との交点を t を用いて表せば良い．連立させて $(1+t^2)x^2+2t^2x+(t^2-1)=0$ を解けば，

$$(x,y)=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

となる．このように，単位円周上のすべての点 (x,y)（ただし，点 $(-1,0)$ を除く．$(-1,0)$ は無限遠点と考える．）が $t=\tan\frac{\theta}{2}$ の有理関数で表されるというのが，定理 1.3 の根拠である．

1.3 指数関数の有理関数の不定積分

定理 1.5 (指数関数の有理関数の不定積分)**.** $R(x)$ を x の有理関数とする．このとき，不定積分 $\displaystyle\int R(e^x)\,dx$ は，$t = e^x$ と変数変換することで，t についての有理関数の不定積分に帰着できる．すなわち，

$$\int R(e^x)dx = \int R(t) \cdot \frac{1}{t}\,dt.$$

これは，$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x = t$ からすぐに分かる．

1.4 無理関数の不定積分

無理関数の不定積分は必ずしも初等関数で書けるとは限らない．ここでは，初等関数で書ける 1 次分数の n 乗根の不定積分について見よう．

定理 1.6 (1 次分数の n 乗根の不定積分)**.** $R(x,y)$ を x,y の有理関数とする．このとき，不定積分 $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ $(ad-bc \neq 0,\ n \geq 2$ は自然数$)$ は，$t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ と変数変換すれば，t についての有理関数の不定積分に帰着できる．すなわち，$x = \varphi(t) = \dfrac{dt^n - b}{-ct^n + a}$，$\varphi'(t) = \dfrac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(-ct^n+a)^2}$ となり，

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(\frac{dt^n - b}{-ct^n + a}, t\right) \cdot \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(-ct^n+a)^2}\,dt.$$

特に，1 次無理関数の不定積分 $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax+b})\,dx$ $(a \neq 0)$ は，$t = \sqrt{ax+b}$ と置くことで，有理関数の不定積分で表すことができる：

$$\int R(x, \sqrt{ax+b})\,dx = \int R\left(\frac{t^2-b}{a}, t\right) \cdot \frac{2t}{a}\,dt. \tag{1.4.1}$$

1.5 2 次無理関数の不定積分

次に 2 次無理関数の不定積分で，有理関数の不定積分に帰着出来るものを考えよう．この形の不定積分はしばしば登場する．基本的な考え方は，適当な変数変換を行って，有理関数の不定積分に帰着させることである．

定理 1.7 (2 次無理関数の不定積分)**.** $R(u,v)$ を u,v の有理関数とする．このとき，不定積分 $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ $(a \neq 0, b^2 - 4ac \neq 0)$ を考えよう．ただし，実数の範囲で考えるので，根号の中は非負，すなわち，すべての x に対して，$ax^2+bx+c \geq 0$ と仮定する．

(1) $a > 0$ のとき：
変数変換 $t = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}x$ を行えば，$x = \psi(t) = \dfrac{-t^2+c}{2\sqrt{a}t - b}$ となるので，

$$\int R\Big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\Big)\,dx = \int R\Big(\psi(t),\, t + \sqrt{a}\psi(t)\Big) \cdot \psi'(t)\,dt.$$

右辺は t の有理関数の不定積分なので，計算できる．
(2) $a<0$ のとき：
$ax^2+bx+c=0$ は必ず異なる 2 つの実数解 $\alpha<\beta$ を持つ．そこで，変数変換 $t=\sqrt{\dfrac{a(x-\alpha)}{x-\beta}}$,
すなわち，$x=\psi(t)=\dfrac{\beta\, t^2-a\,\alpha}{t^2-a}$ を行えば，

$$\int R\Big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\Big)\,dx=\int R\Big(\psi(t),\,(\beta-\psi(t))t\Big)\cdot\psi'(t)\,dt.$$

右辺は有理関数の不定積分となるので，計算できる．

注意 1.8. (i) (2) の場合は必ず異なる 2 つの実数解 $\alpha<\beta$ を持つ．実際，$a<0$ かつ $ax^2+bx+c\geq 0$ なので，上に凸な放物線 $y=ax^2+bx+c$ は必ず x 軸と交わる．さらに，判別式 $b^2-4ac\neq 0$ なので，その交点は必ず 2 個あるからである．

(ii) $a=0$ のときは，1 次無理関数になり式 (1.4.1) より既知である．また，$b^2-4ac=0$ のときは，$ax^2+bx+c=0$ は実の重解 $\alpha\in\mathbb{R}$ を持つので，$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)^2}=\sqrt{a}|x-\alpha\,|$ と 1 次多項式となり，やはり既知である．

従って，上の定理 1.7 の (1), (2) で実 2 次無理関数のすべての場合を尽くしている．

方法 2（ルートを外す方法）
定理 1.7 の 2 次無理関数の不定積分の計算方法は，変数変換の方法が唐突過ぎて中々覚え難いであろう．そこで,「ルートを外す」という考え方による別の計算方法を見よう．

まず，ルートの中身を平方完成する：

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

そこで，$t=x+\dfrac{b}{2a}$ と変数変換を行うと，$\sqrt{ax^2+bx+c}$ は次の 3 タイプのいずれかになる：

$$(1)\quad \sqrt{\alpha^2-x^2}\qquad (2)\quad \sqrt{x^2-\alpha^2}\qquad (3)\quad \sqrt{x^2+\alpha^2}\qquad (\alpha>0). \tag{1.5.1}$$

今，ルートの中身が非負なので，$\sqrt{-x^2-\alpha^2}$ というタイプは現れない．

そこで，これら (1)—(3) のルートが外れるような変数変換を行う．すなわち，それぞれのタイプに応じて，以下のように変数変換を行うと，これらの不定積分は 3 角関数の有理式の不定積分になるので，定理 1.3 より，これらの不定積分は計算できる．

定理 1.9 (2 次無理関数の変数変換 II)**.** $\alpha>0$ とする．

(1) $\sqrt{\alpha^2-x^2}$ のとき，$x=\alpha\sin\theta$ $(-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2})$ とおくと，

$$\sqrt{\alpha^2-\alpha^2\sin^2\theta}=\alpha\cos\theta.$$

(2) $\sqrt{x^2-\alpha^2}$ のとき，$x=\alpha\sec\theta=\dfrac{\alpha}{\cos\theta}$ $(0\leq\theta\leq\pi,\ \theta\neq\frac{\pi}{2})$
とおくと，

$$\sqrt{\frac{\alpha^2}{\cos^2\theta}-\alpha^2}=\alpha\,|\tan\theta|.$$

(3) $\sqrt{x^2+\alpha^2}$ のとき，$x=\alpha\tan\theta$ $(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$ とおくと，

$$\sqrt{\alpha^2\tan^2\theta+\alpha^2}=\frac{\alpha}{\cos\theta}.$$

1.6　2 項関数の不定積分

2 項関数の不定積分（2 項積分）については，初等関数で計算できる場合が完全に分かっている．

定理 1.10 (2 項関数の不定積分)**.** 2 項関数 $x^p(ax^q+b)^r$ $(p,q,r \in \mathbb{Q})$ の不定積分 $\displaystyle\int x^p(ax^q+b)^r\,dx$ は以下のように変数変換すれば，初等関数になる：

(1) $\dfrac{p+1}{q} \in \mathbb{Z}$ のとき，r の分母を n とすると，$t = (ax^q+b)^{\frac{1}{n}}$ とおけばよい．

(2) $\dfrac{p+1}{q} + r \in \mathbb{Z}$ のとき，r の分母を n とすると，$t = \left(\dfrac{ax^q+b}{x^q}\right)^{\frac{1}{n}}$ とおけばよい．

(3) $r \in \mathbb{Z}$ のとき，$\dfrac{p+1}{q}$ の分母を m とすると，$t = x^{\frac{q}{m}}$ とおけばよい．

さらに，2 項関数の不定積分が初等関数で書けるのは，上の (1)—(3) の場合に限る．

- 吹田信之・新保経彦 [SS87] ,「理工系の微分積分」, §3.2, pp.81-82 を参照せよ．

以上が，基本的で汎用性の高い不定積分の計算方法である．もちろん，ここで紹介した以外の関数でも，不定積分が初等関数で計算できる場合があるが，関数の形がかなり限定されたり，非常に技巧的な方法なので，ここでは深入りはしない．しかし，基本的で重要な場合は上で述べたので，これで困ることは殆どない筈である．

もし，将来専門でこれ以外の関数の積分計算が必要になった場合には，その都度対応すれば十分であろう．

References

[Miz98] 溝口宣夫 他, 理工系の微分・積分, 学術図書出版社，(1998).

[Sug80] 杉浦光夫, 解析入門　I, 基礎数学 2，東京大学出版会, (1980).

[Sug89] 杉浦光夫 他, 解析演習, 基礎数学 7，東京大学出版会, (1989).

[SS87] 吹田信之・新保経彦，理工系の微分積分，学術図書出版社，(1987).