累次極限（解析学 B）

（担当：高橋淳也）

1　累次極限の注意

2 変数関数では，極限の取り方の順序によってその極限値が異なる．すなわち，一般に

$$\lim_{x\to a}\left\{\lim_{y\to b} f(x,y)\right\} \neq \lim_{y\to b}\left\{\lim_{x\to a} f(x,y)\right\} \tag{$\sharp$}$$

である．このような例を見よう．

問題 1.1. 関数

$$f(x,y) = \begin{cases} y\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & (x \neq 0 \text{ のとき}), \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

に対して，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$, $\displaystyle\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$ を求めよ．

解答． 次の 3 種類の極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$, $\displaystyle\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$ はすべて異なる概念であることに注意しよう．

まず，**累次極限** と呼ばれる $\displaystyle\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ の正確な意味を確認しておく．$\displaystyle\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ とは，まず x を固定して，y のみの関数と見て y についての 1 変数関数の極限 $\displaystyle\lim_{y\to 0} f(x,y)$ を取る．この極限値が存在するとき，その値は最初に固定した x に依存するので x の関数 $\varphi(x)$ と書ける：$\varphi(x) = \displaystyle\lim_{y\to 0} f(x,y)$.

次に，この $\varphi(x)$ を x の 1 変数関数としての極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\varphi(x)$ を取る．ここで，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\varphi(x)$ とは，$x \neq 0$ でありながら 0 に近づくという意味であり，決して 0 にならないことに注意しよう．従って，$\varphi(x)$ の定義域 x の動く範囲は $x \neq 0$ である．

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ である．

まず，次の不等式が成立する：

$$\Bigl|f(x,y)\Bigr| \leq |y|. \tag{$\star$}$$

実際，$x \neq 0$ のとき，$f(x,y) = y\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ なので，

$$\Bigl|f(x,y)\Bigr| = \left|y\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |y|\cdot\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |y|.$$

次に，$x = 0$ のときは $f(0,y) = 0$ なので，不等式 $(\star)$ は明らかに成立する．

よって，$(x,y)\to(0,0)$，すなわち，$\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow 0$ のとき，不等式 $(\star)$ より，

$$\Bigl|f(x,y) - 0\Bigr| \leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow 0.$$

ゆえに，$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ である．

(ii) $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0$ である．

まず，$\lim_{y\to 0}$ を取る．上の注意より，最初に固定する x は $x \neq 0$ である定数として $y \to 0$ とする．このとき，$f(x,y) = y\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ なので，

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} y\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\lim_{y\to 0} y = 0.$$

次に $\lim_{x\to 0}$ を取るが，定数関数なので，

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

従って，$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0$ である．

(iii) $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$ は存在しない．

前問 (ii) の x と y の極限の順序を交換した場合である．考え方 (ii) と同様である．

まず，$\lim_{x\to 0}$ を取る．上の注意より，最初に固定する y は $y \neq 0$ である定数と見て $x \to 0$ とする．また，$x \neq 0$ であることに注意しよう．このとき，$f(x,y) = y\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ なので，

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} y\sin\left(\frac{1}{x}\right) = y\,\underbrace{\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{振動}}$$

であるが，右辺の極限は振動して存在しない（$y \neq 0$ に注意）．従って，$\lim_{y\to 0}$ をとっても存在しないので，$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$ は存在しない． □

2 変数関数では，極限の取り方の順序によってその極限値が異なることを見た．すなわち，一般に

$$\lim_{x\to a}\left\{\lim_{y\to b} f(x,y)\right\} \neq \lim_{y\to b}\left\{\lim_{x\to a} f(x,y)\right\} \tag{$\sharp$}$$

である．

このように，一般に極限の順序を自由に入れ替えることは出来ない．従って，極限を用いて定義される微分 $\dfrac{\partial}{\partial x}$，積分 $\displaystyle\int_a^b$，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$ も，無条件では自由に入れ替えることは出来ない．これは大変注意を要する事実である（これらの内容は「一様収束」という概念がポイントになるが，講義の内容を超えるので扱えない）．

もっとも，自然科学や工学で扱う様な良い関数は自由に入れ替えられる場合が多いが，ごく稀に例外もある．

では，上の累次極限が一致する，すなわち，($\sharp$) において等号が成立するためには，どのような条件が必要なのであろうか？一つの十分条件として次の定理が知られている．

定理 1.2 (累次極限の交換可能性)**.** 2 変数関数 $f(x,y)$ に対し，極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\alpha\in\mathbb{R}$ が存在したとする．

(1) a の近傍の $x\neq a$ に対して $\displaystyle\lim_{y\to b} f(x,y)=\varphi(x)$ が存在すれば，$\displaystyle\lim_{x\to a}\varphi(x)=\alpha$ が成立する． すなわち，

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\lim_{x\to a}\left\{\lim_{y\to b} f(x,y)\right\}=\alpha\,.$$

(2) b の近傍の $y\neq a$ に対して $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x,y)=\psi(y)$ が存在すれば，$\displaystyle\lim_{y\to b}\psi(y)=\alpha$ が成立する．すなわち，

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\lim_{y\to b}\left\{\lim_{x\to a} f(x,y)\right\}=\alpha\,.$$

従って，(1), (2) の仮定がすべて満たされれば，これらの極限はすべて一致する：

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\lim_{x\to a}\left\{\lim_{y\to b} f(x,y)\right\}=\lim_{y\to b}\left\{\lim_{x\to a} f(x,y)\right\}=\alpha\,.$$

（溝口宣夫 他 「理工系の微分・積分」 §**5.2**, p.124, 定理 5.10.）

上の問題 1.1 は，この定理 1.2 (2) の仮定が満たされない例である．